



МЕТОДИЧЕСКАЯ
ЛИТЕРАТУРА

Министерство образования и науки,
молодежи и спорта Украины

**Харьковский
национальный
университет
имени В. Н. Каразина**

**С. С. Апостолов
З. А. Майзелис**

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Учебно-методическое пособие

Харьков – 2012

УДК 517.15:51-72(075.8)
ББК 22.161 Ля73
А 76

Рецензенты:

Ямпольский В. А. - член-корр. НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, зав. отд. ИРЭ НАН Украины, профессор;

Ермолаев А. М. - доктор физ.-мат. наук, зав. кафедры теоретической физики имени академика И. М. Лифшица Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, профессор.

Утверждено к печати решением Научно-методического совета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (протокол № 1 от 11.10.2012 г.)

Апостолов С. С.

А76 Асимптотические методы : учебно-методическое пособие / С. С. Апостолов, З. А. Майзелис - Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2012. - 60 с.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов физических специальностей, изучающих асимптотические методы, содержит краткое элементарное изложение ряда методов, используемых в анализе для получения асимптотических выражений, и ряд задач, решение которых способствует пониманию идей изложенных методов и развитию необходимых практических навыков их использования.

УДК 517.15:51-72(075.8)
ББК 22.161.1я73

© Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина, 2012
© Апостолов С. С., Майзелис З. А., 2012
© Дончик И. Н., макет обложки, 2012

Содержание

| | |
|---|-----------|
| Предисловие | 4 |
| Раздел I. Алгебраические уравнения | 6 |
| §1. Вычисления и оценка погрешности | 6 |
| §2. Трансцендентные алгебраические уравнения | 7 |
| §3. Неявные функции. Метод обращения Лагранжа | 9 |
| §4. Асимптотическое вычисление сумм | 10 |
| §5. Асимптотики и геометрия. Графики функций | 12 |
| Раздел II. Дифференциальные уравнения | 14 |
| §6. ДУ с малым параметром. Решение ДУ в окрестности особой точки | 14 |
| §7. Сингулярно возмущенные ДУ | 16 |
| §8. Слабая нелинейность в уравнениях колебаний | 19 |
| §9. Графики решений ДУ. Фазовые портреты | 20 |
| Раздел III. Асимптотики интегралов | 22 |
| §10. Общие методы вычисления интегралов | 22 |
| §11. Интегрирование по частям. Интегралы Фурье | 23 |
| §12. Метод стационарной фазы | 25 |
| §13. Метод Лапласа. Понятие о методе перевала | 27 |
| Решения | 30 |
| Указания | 48 |
| Ответы | 55 |

Предисловие

Настоящее издание содержит краткое элементарное изложение ряда методов, используемых в анализе для получения асимптотических выражений, и предназначено студентам физических специальностей, изучающих асимптотические методы, преподавателям, в качестве материала для занятий со студентами, а также для всех начинающих знакомиться с методами получения асимптотических формул.

Авторы постарались выстроить материал таким образом, чтобы избежать резкого перехода от «привычной» высшей математики к специфическому языку асимптотических методов. Тем не менее, предполагается, что читатель данного пособия знаком с основными разделами высшей математики, а именно:

1. Предел функции. Производная. Частные производные.
2. Неопределенный, определенный и несобственный интегралы. Замена переменных. Интегрирование по частям.
3. Ряды. Степенные ряды. Формула Тейлора с остаточным членом. Символы Ландау O и o .
4. Комплексные числа. Интегрирование вдоль комплексной линии. Основная теорема о вычетах.
5. Дифференциальные уравнения. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пособие состоит из трех разделов. Первый раздел посвящен приближенным вычислениям и асимптотическому решению алгебраических уравнений. Второй раздел содержит асимптотические методы, применяемые при решении дифференциальных уравнений. В третьем разделе изложены методы получения асимптотических разложений интегралов.

Главы разбиты на параграфы, каждый из которых объединяет методы одной тематики и может быть использован как основа для

одного занятия. Параграфы имеют специфическую структуру. В начале параграфа имеется краткая теоретическая справка об определенных методах и их применении. Затем приводится ряд задач, решение которых способствует пониманию идеи метода и развитию необходимых практических навыков в его использовании. Эти задачи снабжены полными решениями, размещенными в конце пособия, и могут быть использованы преподавателем на занятии для иллюстрации описанных методов. В конце параграфа приводятся задачи и упражнения для самостоятельного решения. Обратим внимание, что все задачи, приведенные в пособии, снабжены ответами, собранными в отдельный раздел. Также к большинству задач имеются указания, позволяющие решить сложные задачи не прибегая к полному решению.

Раздел I. Алгебраические уравнения

§1. Вычисления и оценка погрешности

Один математик говорит другому: «Назови какое-нибудь число».

Второй: «Ну, пусть будет π в степени e ».

Первый: «Ха-ха-ха! А у меня e в степени π . У меня больше, я выиграл!»

Фольклор

t1.1. Формула Тейлора с остаточным членом:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \Delta x^k + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \quad (1)$$

Здесь $\Delta x = x - x_0$, $x_0 \leq \xi \leq x$ (либо $x \leq \xi \leq x_0$).

t1.2. Вычисления числовых выражений проводится следующим образом. Пусть необходимо вычислить значение функции $f(x)$ в некоторой точке x с заданной абсолютной погрешностью R (или относительной r). Если значение функции и ее производных несложно вычислить в точке x_0 близкой к x , то есть $\Delta x = x - x_0$ мало, то можно воспользоваться Формулой Тейлора (1), взяв достаточное количество членов разложения, чтобы $|R_n(x)| < R$ (или $|R_n(x)| < r|f(x)|$).

Задачи

p1.1. Приблизленно вычислить $A = \sqrt{2}$ в нулевом, первом и втором приближении, представив его двумя разными способами: $A_1 = \sqrt{1+1}$ и $A_2 = \sqrt{4-2}$. Сравнить результаты. Оценить абсолютную погрешность для каждого приближения.

p1.2. Предложить способ вычисления $\sin 3$ с относительной погрешностью до 2×10^{-3} .

p1.3. Во сколько раз мощность P_1 выходного сигнала больше мощности P_0 входного, если сигнал усилился на 1 дБ (1 децибел)? Вычислить с точностью 5%.

Задачи для домашней работы

h1.1. Приблизительно вычислить $B = \sqrt{3}$ в нулевом, первом и втором приближении, представив его в виде $B_1 = \sqrt{4-1}$ и $B_2 = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{2}{9}}$. Сравнить результаты. Оценить абсолютную погрешность для каждого приближения.

h1.2. Предложить способ вычисления $\ln 3$ с относительной погрешностью до 0.5×10^{-3} .

h1.3. Используя приближенные вычисления, покажите, что первый математик из эпиграфа действительно выиграл, то есть покажите, что $\pi^e < e^\pi$.

§2. Трансцендентные алгебраические уравнения

- Голубчики, – сказал Фёдор Симеонович озабоченно.
 - Это же проблема Бен Бецалеля. Калиостро же доказал, что она не имеет решения.
 - Мы сами знаем, что она не имеет решения,
 - сказал Хунта, немедленно оцетиниваясь.
 - Мы хотим знать, как её решать.
 - Как-то странно ты рассуждаешь, Кристо...
 - Как же искать решение, когда его нет?
 - Бессмыслица какая-то...
- Извини, Теодор, но это ты очень странно рассуждаешь.
 - Бессмыслица – искать решение, если оно и так есть.
 - Речь идёт о том, как поступать с задачей, которая решения не имеет.

Аркадий и Борис Стругацкие, «Понедельник начинается в субботу»

t2.1. Пусть уравнение $F(x, \varepsilon) = 0$ при $\varepsilon = 0$ имеет корень x_0 , то есть $F(x_0, 0) = 0$, где $F(x, \varepsilon)$ достаточно дифференцируемая функция¹ обоих аргументов. Если $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, 0) \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(x_0, 0) \neq 0$, то исходное уравнение имеет корень x_ε , который может быть найден

¹Здесь и далее используется понятие *достаточно дифференцируемая функция*. Это такая функция, которая дифференцируема столько раз, сколько того требует дальнейшее изложение.

В виде

$$x_\varepsilon = x_0 + \left(-\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(x_0, 0) / \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, 0) \right) \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2)$$

Задачи

р2.1. Докажите равенство (2).

р2.2. Асимптотически по малому параметру $\varepsilon \ll 1$ на интервале $0 < x < 1$ найти:

(а) один корень уравнения $\sin(x - \varepsilon) = \exp(2\varepsilon x) - 1$;

(б) два различных корня уравнения $\sin(x^2 + \varepsilon^2) = \exp(2\varepsilon x) - 1$.

р2.3. Найти приближенное решение уравнения: $4 \sin x = e^{-x}$ на интервале $-1 < x < 1$. Что здесь играет роль малого параметра? Сколько необходимо взять членов разложения по этому малому параметру, чтобы получить x с абсолютной погрешностью 10^{-2} ?

р2.4. Найти асимптотически, с погрешностью менее 5%, все корни уравнения $x = \operatorname{tg} x$. Есть ли в этом уравнении малый параметр?

Задачи для домашней работы

h2.1. Асимптотически по малому параметру $\varepsilon \ll 1$ найти:

(а) один корень уравнения $\operatorname{tg}(\varepsilon x) = \cos x$;

(б) два различных корня уравнения $\ln(x + \varepsilon) = \sin(x - 1)$

на интервале $0 < x < 2$.

h2.2. Найти приближенное решение уравнения: $4 \operatorname{tg} x = e^x$ на интервале $0 < x < 1$. Что здесь играет роль малого параметра? Сколько необходимо взять членов разложения по этому малому параметру, чтобы получить x с абсолютной погрешностью 10^{-2} ?

h2.3. Найти, с погрешностью менее 10%, все корни уравнения $x^2 = \operatorname{ctg} 2x$. Что в этом уравнении есть малый параметр?

h2.4. Докажите, что если существуют вторые производные $F(x, \varepsilon)$ в окрестности $(x_0, 0)$, то $o(\varepsilon)$ в уравнении (2) можно заменить на $O(\varepsilon^2)$.

§3. Неявно заданные функции.

Метод обращения Лагранжа

t3.1. Пусть функция $y = f_\varepsilon(x)$ задана неявным образом в виде уравнения $F(x, y, \varepsilon) = 0$, где $x \in X$ и $F(x, y, \varepsilon)$ достаточно дифференцируемая функция своих аргументов. Пусть при $\varepsilon = 0$ это уравнение может быть разрешено явно в виде $y = f_0(x)$, то есть $F(x, f_0(x), 0) \equiv 0$ для всех $x \in X$. Если

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, f_0(x), 0) \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(x, f_0(x), 0) \neq 0, \quad (3)$$

то функция $y = f_\varepsilon(x)$ может быть найдена при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде

$$f_\varepsilon(x) = f_0(x) + \left(-\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(x, f_0(x), 0) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, f_0(x), 0) \right) \varepsilon + o(\varepsilon). \quad (4)$$

Замечание: Если вторые производные F при $(x, f_0(x), 0)$ и функция $f_0(x)$ ограничены для $x \in X$, то $o(\varepsilon)$ можно заменить на $O(\varepsilon^2)$ (см. **h2.4**).

t3.2. *Формула обращения Лагранжа* [1]. Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности $z = 0$ и $f(0) \neq 0$. Тогда существуют такие $w_0 > 0$ и $z_0 > 0$, что уравнение

$$w = \frac{z}{f(z)}, \quad \text{при } |z| < z_0, \quad (5)$$

имеет аналитическое по w (при $|w| < w_0$) решение

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [f(z)]^k \right\} \Big|_{z=0} = wf(0) + w^2 f(0) f'(0) + \dots \quad (6)$$

Задачи

р3.1. Асимптотически по $\mu \gg 1$ найти:

- (а) в нулевом, первом и втором приближениях явный вид функции $y = f(x)$, заданной уравнением $\operatorname{arctg}(y + \mu) = y - x/\mu$;
- (б) две различные ветви $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ функции, заданной уравнением $y = \ln(y + x^2 + \mu^{-2}) + \cos x$ при $x \sim \mu^{-1}$.

р3.2. Построить обратную функцию к $y(x) = x^{-1}e^{-x}$ при:

- (а) $y \gg 1$;
- (б) $y \ll 1$.

Задачи для домашней работы

h3.1. Асимптотически при $\varepsilon \ll 1$ в первых двух приближениях найти явный вид функции $y = f(x)$ для $y + x = \sin(\varepsilon y - x)$.

h3.2. Асимптотически при больших значениях параметра μ в нулевом, первом и втором приближениях найти явный вид функции $y = f(x)$, заданной уравнением $\operatorname{arctg}^2(xy + \mu) = y - x$.

h3.3. Решить в трех первых приближениях задачу **р3.1б**.

h3.4. Пользуясь методом обращения Лагранжа построить в трех порядках обратную функцию к $y = x^2/\operatorname{tg} x$ в окрестности:

- (а) $x_1 = 0$;
- (б) $x_2 = \pi/2$.

h3.5. Доказать утверждения из **t3.1** и замечания к нему.

§4. Асимптотическое вычисление сумм

Математика является учением об отношениях между формулами, лишёнными какого бы то ни было содержания.

Давид Гильберт

t4.1. Пусть достаточно дифференцируемая неотрицательная функция $f(x)$ такова, что интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ расходится. Тогда

при $n \rightarrow \infty$ верно²:

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^{n+1} f(x)dx + R_n, \quad R_n = O\left(\int_1^{n+1} |f'(x)|dx\right). \quad (7)$$

Замечание: Приведенные здесь асимптотики являются частными случаями общей формулы суммирования Эйлера–Маклорена (см. [1]). Например, асимптотику (7) можно уточнить:

$$R_n = [f(1) - f(n+1)]/2 + R'_n, \quad R'_n = O\left(\int_1^{n+1} |f''(x)|dx\right).$$

t4.2. Если $\int_1^\infty f(x)dx$ сходится, то

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^\infty f(k) + O\left(\int_{n+1}^\infty |f(x)|dx\right). \quad (8)$$

t4.3. Для знакопеременных сумм при $n \gg 1$ верно:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k f(k) = \frac{f(2n) - f(0)}{2} + R_n, \quad R_n = O\left(\int_0^{2n-1} |f''(x)|dx\right).$$

Задачи

p4.1. Вычислить два первых приближения сумм при $n \gg 1$:

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}; \quad (b) \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}; \quad (c) \sum_{k=1}^n 2^k \ln k; \quad (d) \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\ln(n+k)}.$$

Задачи для домашней работы

h4.1. Вычислить два первых приближения сумм при $n \gg 1$:

$$(a) \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k}; \quad (b) \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k^2}; \quad (c) \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k}; \quad (d) \sum_{k=1}^{2n} (-2)^k \ln k.$$

²Равенство (7) представляет практический интерес только, если $|R_n| \ll \int_1^{n+1} f(x)dx$.

h4.2. Показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-n\varepsilon}) = -\frac{\pi^2}{6\varepsilon} - \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{\varepsilon}{24} + o(\varepsilon^3), \text{ при } 0 < \varepsilon \ll 1.$$

h4.3. Показать, что асимптотику в пункте **t4.3** можно уточнить:

$$R_n = \frac{f'(0) - f'(2n)}{4} + R'_n, \quad |R'_n| = O\left(\int_1^{n+1} |f'''(x)| dx\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

§5. Асимптотики и геометрия. Графики функций

Дайте-ка я покрупнее нарисую бесконечно малые треугольники.

Из лекторских высказываний

Задачи

p5.1. Построить схематически графики функций, используя их асимптотическое поведение в окрестности особых точек:

$$(a) y = (e^{x^2} - 1)^{-1}; \quad (b) y = \sqrt{|x| + x^2}.$$

p5.2. Вычислить в главном и следующем приближении³ разность длин хода лучей от двух точечных источников A_1 и A_2 света в точку экрана, которая видна из середины отрезка A_1A_2 под углом α к нормали к экрану. Источники расположены на одинаковом расстоянии S от экрана, расстояние между источниками равно $d \ll S$.

p5.3. Сила взаимодействия двух расположенных параллельно пластин площади S равна $F(a) = S\phi_0/a^4$, где $a \ll S^{1/2}$ — расстояние между ними, а ϕ_0 не зависит от a и S . Вычислить в главном приближении силу взаимодействия двух шаров, расположенных на расстоянии a_0 друг от друга. Радиусы шаров равны $R \gg a_0$.

³Часто в физике используется термин «главное приближение», который означает *первый ненулевой* член разложения по малому параметру. Например, в главном приближении $\sin x \approx x$, если x мал. Термин «следующее приближение» означает, что разложение продолжают, пока не обнаружится *следующий ненулевой* член. Например, в главном и следующем приближении $\sin x \approx x - x^3/6$.

Задачи для домашней работы

h5.1. Построить схематически графики функций, используя асимптотическое поведение функций:

$$(a) y = \ln(e^{-x^2} + 1); \quad (b) y = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x}; \quad (c) y = \sqrt{|x|^{3/2} + e^{-x^2}}.$$

h5.2. Наблюдатель видит на горизонте спутник. Оценить в главном приближении расстояние от него до наблюдателя, если спутник находится на высоте H над поверхностью Земли радиусом R . Какое условие необходимо наложить на H , чтобы ответ в следующем приближении не зависел от высоты наблюдателя h ?

h5.3. Два шара радиуса R пересекаются так, что расстояние между их центрами равно $a \ll R$. Один шар имеет равномерную плотность положительного заряда ρ , второй — отрицательного заряда $-\rho$. Вычислить толщину области пространства с ненулевым зарядом как функцию сферических угловых координат (φ, θ) и потенциал электромагнитного поля во всем пространстве.

h5.4. Найти в главном и следующем приближениях длины полуосей эллипсоида $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 1 + \varepsilon xy$ при $\varepsilon \ll 1$.

Раздел II. Дифференциальные уравнения

§6. ДУ с малым параметром. Решение ДУ в окрестности особой точки [2, 3]

*Инженер думает, что его расчеты представляют собой приближение к действительности.
Физик считает, что действительность — это приближение к его расчетам.
Математик вообще не видит тут никакой связи.*

Наблюдение

t6.1. Пусть функция $f(t, x, \varepsilon)$ достаточно дифференцируема, $x_0(t)$ — решение уравнения $\dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), 0)$ с начальным условием $x(t_0, 0) = x^0$. Тогда решение уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varepsilon), \quad x(t_0, \varepsilon) = x^0 \quad (9)$$

может быть представлено в виде

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где функции $x_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяют уравнениям

$$\dot{x}_k(t) = f_x(t, x_0(t), 0)x_k(t) + f_k(t)$$

с начальным условием $x_k(t_0) = 0$. Здесь f_x — производная f по x , $f_k(t)$ — функции, выражающиеся определенным образом через функции $x_j(t)$, $j < k$. В частности, $f_1(t) = f_\varepsilon(t, x_0(t), 0)$.

Задачи

р6.1. Найти точное и асимптотическое в главном и двух следующих приближениях по $\varepsilon \ll 1$ решения дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = x(t) \cos(\varepsilon t) + \sin(2\varepsilon t)$ с начальным условием $x(0) = e^\varepsilon$. Сравнить эти решения, раскладывая точное решение по $\varepsilon \ll 1$.

р6.2. В главном и следующем приближении по $\mu \gg 1$ асимптотически решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2 \operatorname{arctg} [\mu x(t)] - y(t), & x(1) = \pi, \\ \mu \dot{y}(t) = \exp [x(t) + y(t)], & y(1) = 0. \end{cases}$$

р6.3. Движение квантовой частицы, с заданным моментом импульса в центральном кулоновском поле $U(r, \theta, \varphi) = U(r) = -a/r$, описывается уравнением

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + \left(E - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \psi(r) = 0,$$

где $\psi(r)$ — волновая функция частицы, $E < 0$ — ее энергия, l — целое число, характеризующее значение момента импульса. Изучить асимптотическое поведение функции $\psi(r)$ для малых и больших значений переменной r , считая, что функция ψ — ограничена.

р6.4. Построить в главном и следующем приближениях асимптотическое решение уравнения $y'(x) + y^3(x) = x^3$ при $x \gg 1$.

Задачи для домашней работы

h6.1. Найти точные решения задач

(a) $\dot{x}(t) = e^{x(t)+t\varepsilon}, \quad x(0) = 0;$

(b) $x^2 y''(x) + 2\varepsilon x y'(x) + \varepsilon^2 y(x) = x, \quad y(1) = y'(1) = 0$

и их асимптотические решения по $\varepsilon \ll 1$ в главном и следующем приближениях. Сравнить эти решения, раскладывая точное решение по малому параметру.

h6.2. Определить асимптотическое решение задачи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)/(\mu + y(t)), & x(0) = 1, \\ \ddot{y}(t) = \sin [x(t)y(t)], & y(0) = \pi, \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

в главном и следующем приближениях по $\mu \gg 1$.

h6.3. Описать в главном и следующем приближениях асимптотическое поведение решений задач при $x \ll 1$ и $x \gg 1$

(a) $y'(x) + y^2(x) = \exp(x^2), \quad y(0) = 0;$ (b) $y'(x) + y^3(x) = \frac{1}{x}.$

h6.4. Вывести выражения для $f_2(t)$ из пункта **t6.1.**

h6.5. Используя результаты пункта **t6.1**, записать уравнения для нулевого и первого приближения по $\varepsilon \ll 1$ решения уравнения $y''(x) + a(x, \varepsilon)y'(x) + b(x, \varepsilon)y(x) = c(x, \varepsilon)$, с начальными условиями $y(x_0) = u(\varepsilon)$, $y'(x_0) = v(\varepsilon)$, где $a(x, \varepsilon)$, $b(x, \varepsilon)$, $c(x, \varepsilon)$, $u(\varepsilon)$ и $v(\varepsilon)$ — достаточно дифференцируемые функции.

§7. Сингулярно возмущенные ДУ

Многие физики считают, что так называемое строгое определение производных и интегралов вовсе не нужно для хорошего понимания дифференциального и интегрального исчисления. Я разделяю их точку зрения.

Лев Семёнович Понтрягин

t7.1. Пусть задана система ДУ с начальными условиями на отрезке $0 \leq t \leq T \leq \infty$ в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y), & x(0, \varepsilon) = x^0, \\ \varepsilon \dot{y} = F(t, x, y), & y(0, \varepsilon) = y^0. \end{cases} \quad (10)$$

Асимптотическое решение этой системы по малому параметру ε может быть найдено следующим образом⁴. Представим неизвестные функции в виде суммы двух решений, каждое из которых раскладываем по малому параметру ε :

$$z(t, \varepsilon) = \bar{z}(t, \varepsilon) + \zeta(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k [\bar{z}_k(t) + \zeta_k(\tau)] + Rz_n(t, \varepsilon).$$

Функции \bar{z} и ζ подразумевают так называемые регулярное и пограничное решение, $\tau = t/\varepsilon$. Здесь z соответствует x или y , \bar{z} соответствует \bar{x} или \bar{y} , а ζ соответствует ξ или η . В нулевом приближении мы можем найти регулярное решение, рассматривая данное уравнение вдали от границы, считая, что пограничное решение равно нулю в главном приближении, и приравнивая ε к

⁴Изложенный алгоритм достоверно приводит к правильному ответу при выполнении определенных условий, сформулированных А. Н. Тихоновым и А. Б. Васильевой [2]. В рамках этих условий при $\varepsilon \rightarrow 0$ верно, что $\|Rz_n(t, \varepsilon)\| = \bar{O}(\varepsilon^{n+1})$ и построенное решение единственно.

нулю:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_0(t) = f(t, \bar{x}_0(t), \bar{y}_0(t)), & \bar{x}_0(0) = x^0, \\ F(t, \bar{x}_0(t), \bar{y}_0(t)) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Для определения пограничного решения мы рассматриваем данное уравнение вблизи границы. В этом случае мы можем положить $t = 0$ во всех регулярных функциях, но сохранить зависимость от τ в пограничных решениях ξ_0 и η_0 :

$$\begin{cases} \xi_0(\tau) = 0, \\ \dot{\eta}_0(\tau) = F(0, x^0, \bar{y}_0(0) + \eta_0(\tau)), & \eta_0(0) = y^0 - \bar{y}_0(0). \end{cases} \quad (12)$$

Здесь, и далее в этой теме, точка над функцией, зависящей от τ , обозначает дифференцирование не по t , а по τ .

Замечание: Для вычисления следующего приближения используйте:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{f}_x(t)\bar{x}_1(t) + \bar{f}_y(t)\bar{y}_1(t), & \bar{x}_1(0) = -\xi_1(0), \\ \xi_1(\tau) = -\int_{\tau}^{\infty} \Delta f(\tau') d\tau', \\ \bar{F}_x(t)\bar{x}_1(t) + \bar{F}_y(t)\bar{y}_1(t) = \dot{\bar{y}}_0(t), \\ \dot{\eta}_1(\tau) = F_x(\tau)\xi_1(\tau) + F_y(\tau)\eta_1(\tau) + G(\tau), & \eta_1(0) = -\bar{y}_1(0), \end{cases} \quad (13)$$

где $\bar{g}(t)$ и $g(\tau)$ обозначают $g(t, \bar{x}_0(t), \bar{y}_0(t))$ и $g(0, x^0, \bar{y}_0(0) + \eta_0(\tau))$, соответственно, $\Delta g(\tau) = g(\tau) - \bar{g}(0)$, g обозначает f , f_x , f_y , F_x , F_y или F_t , индекс x , y или t обозначает частную производную по соответствующему аргументу. Функцию $G(\tau)$ определяем как

$$G(\tau) = \Delta F_t(\tau)\tau + \Delta F_x(\tau)[\dot{\bar{x}}_0(0)\tau + \bar{x}_1(0)] + \Delta F_y(\tau)[\dot{\bar{y}}_0(0)\tau + \bar{y}_1(0)].$$

Задачи

р7.1. Решить точно и асимптотически в нулевом и первом приближении при $\varepsilon \ll 1$ уравнение $\varepsilon \dot{x}(t) + x(t) = e^{-t}$, $x(0) = 0$. Сравнить результаты.

р7.2. Используя схему (11)-(12), асимптотически решить

$$2\dot{x}(t) = x(t) + y(t)e^t, \quad x(0) = 1, \quad \varepsilon \dot{y}(t) = 1 - x(t)y(t), \quad y(0) = 2.$$

Задачи для домашней работы

h7.1. В нулевом приближении при $\varepsilon \ll 1$ решить задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)y(t)e^t, & x(0) = 2, \\ \varepsilon \dot{y}(t) = (t+1)^2 - y(t)/x(t), & y(0) = 1. \end{cases}$$

h7.2. Точно и асимптотически в нулевом и первом приближении по $\varepsilon \ll 1$ решить задачу

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}(t) = -2x(t) - y(t), & x(0) = 1, \\ \varepsilon \dot{y}(t) = x(t) + 2e^{-t}, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Сравнить результаты.

h7.3. Полагая, что $\hbar \rightarrow 0$, построить решение стационарного уравнения Шредингера

$$\hbar^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -p^2(x)\psi(x), \quad p(x) = \sqrt{2m[E - U(x)]},$$

в нулевом и первом приближениях, проведя замену

$$\psi(x) = \exp [i\hbar^{-1}S_0(x) + S_1(x) + O(\hbar)]$$

в уравнении Шредингера и приравнивая коэффициенты при равных степенях \hbar , при произвольной энергии E .

h7.4. Опираясь на уравнения (11), предложить схему решения в нулевом приближении уравнения

$$\varepsilon \ddot{x} = h(t, x, \varepsilon), \quad x(0, \varepsilon) = x^0(\varepsilon), \quad \dot{x}(0, \varepsilon) = X^0(\varepsilon).$$

§8. Слабая нелинейность в уравнениях колебаний

...Да, простота нужнее людям,
Но сложное понятней им.

Борис Пастернак

t8.1. *Метод Ван-дер-Поля*⁵. Решение нелинейного уравнения колебаний

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \varepsilon f[x(t), \dot{x}(t)] \quad (14)$$

может быть представлено в виде $x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Здесь $a(t)$ и $\varphi(t)$, в случае достаточно малого значения параметра ε , оказываются медленно меняющимися функциями времени и могут быть асимптотически найдены из системы уравнений

$$\dot{a}(t) = \varepsilon A[a(t)], \quad \dot{\varphi}(t) = \varepsilon \Phi[a(t)], \quad (15)$$

$$A[a] = -\frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f[a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi] \sin \psi d\psi, \quad (16)$$

$$\Phi[a] = -\frac{1}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} f[a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi] \cos \psi d\psi. \quad (17)$$

Замечание: Здесь вместо одной неизвестной функции $x(t)$ введено две другие $a(t)$ и $\varphi(t)$. Для определенности в методе Ван-дер-Поля требуется, чтобы $\dot{x}(t) = -\omega_0 a(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t))$.

Задачи

p8.1. Докажите, что решение уравнения (14) может быть найдено с помощью системы (15)-(17).

p8.2. Система совершает затухающие колебания, описываемые уравнением $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = -\varepsilon \dot{x}(t)$. Найти точное решение этого уравнения движения и сравнить его с приближенным решением, полученным методом Ван-дер-Поля.

⁵Строго говоря, здесь изложен метод Крылова-Боголюбова, являющийся обобщением метода Ван-дер-Поля. Подробнее об этом см. [3].

p8.3. Система совершает ангармонические колебания, описываемые уравнением $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = -\varepsilon x^3(t)$. Определить следующие поправки к частоте ω_0 и амплитуде a_0 колебаний при условии, что $\varepsilon \ll 1$, двумя способами:

- (a) представив в виде ряда $x(t) = a_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + x_1(t) + x_2(t) + \dots$, где $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \dots$ и a_0 — постоянная амплитуда;
- (b) методом Ван-дер-Поля.

Сравнить результаты.

Задачи для домашней работы

h8.1. Решить задачу **p8.3** для системы, описываемой уравнением

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = -\varepsilon x^2(t).$$

h8.2. Решить задачу (14) методом Ван-дер-Поля, если:

- (a) $f[x, y] = (1 - x^4)y$; (b) $f[x, y] = (\omega x - y)^3$;
- (c) $f[x, y] = \frac{y}{a_0^2 + x^2}$, при $|a(t) - a_0| \ll a_0$.

h8.3. Показать, что если функция $f[x, y]$ в уравнении (14) не зависит от второго аргумента y , то метод Ван-дер-Поля даст $a(t) = \text{const}$. Какой результат даст этот метод, если функция $f[x, y]$ не зависит от первого аргумента?

§9. Графики решений ДУ. Фазовые портреты

t9.1. Фазовый портрет для системы дифференциальных уравнений $\dot{x}(t) = f(x(t), y(t))$, $\dot{y}(t) = g(x(t), y(t))$ представляет собой совокупность всех возможных траекторий на фазовой плоскости (x, y) .

Замечание: Фазовый портрет для уравнения $\ddot{x} = f(x(t), \dot{x}(t))$ рисуют на фазовой плоскости (x, \dot{x}) , переходя к системе уравнений $\dot{x}(t) = y(t)$, $\dot{y}(t) = f(x(t), y(t))$.

t9.2. Асимптотический метод фазовой плоскости состоит в нахождении особых точек (например, стационарных точек) системы, построении фазового портрета в окрестности каждой из таких точек (например, с использованием метода линеаризации), а затем объединении полученных результатов в общий фазовый портрет.

Задачи

p9.1. Решить при $|x| \ll 1$ и $|x| \gg 1$ асимптотически в главном приближении дифференциальное уравнение

$$y'(x) + xy^3(x) = x^4, \quad y(0) = 0.$$

Исходя из полученных результатов, построить график $y(x)$.

p9.2. Построить при $a = 3$ и $b = 2$ фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a - y^2(t) - by^{-1}(t) \cos x(t), \\ \dot{y}(t) = -b \sin x(t). \end{cases}$$

Задачи для домашней работы

h9.1. Решить при $|x| \ll 1$ и $|x| \gg 1$ асимптотически в главном приближении дифференциальное уравнение

$$y'(x) + xy^3(x) = \exp(-x), \quad y(0) = 0.$$

Исходя из полученных результатов, построить графики $y(x)$ его возможных решений.

h9.2. Построить фазовый портрет уравнения колебаний

$$\ddot{x}(t) - x(t) + x^3(t) = 0.$$

h9.3. Построить фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sin y(t), \\ \dot{y}(t) = \sin x(t). \end{cases}$$

h9.4. Решить задачу **p9.2** при $a = 2$ и $b = 4$.

Раздел III. Асимптотики интегралов

§10. Общие методы вычисления интегралов

Математик — это тот, для кого равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \text{ очевидно, как } \langle 2 \times 2 = 4 \rangle.$$

Уильям Томсон (лорд Кельвин)

t10.1. Интеграл $I(\varepsilon)$, зависящий от малого параметра ε , может быть вычислен разложением в ряд Тейлора (1). Например, если $a(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$ и $f(x, \varepsilon)$ — достаточно дифференцируемые и интегрируемые функции, то

$$I(\varepsilon) = \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx = \int_{a_0}^{b_0} f_0(x) dx + \varepsilon I'(0) + \frac{\varepsilon^2 I''(0)}{2} + \dots,$$
$$I'(0) = f_0(b_0) b'(0) - f_0(a_0) a'(0) + \int_{a_0}^{b_0} f'_\varepsilon(x, 0) dx, \quad (18)$$

где $a_0 = a(0)$, $b_0 = b(0)$ и $f_0(x) = f(x, 0)$.

t10.2. *Метод выделения главной части.* Если знакопостоянные функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что для всех x , не достаточно близких к x_0 , верно $|f(x_0)| \gg |f(x)|$ и $|g(x_0)| \gg |g(x)|$, причем $|f(x) - g(x)| \ll |f(x_0)|$ при x из окрестности x_0 , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx + R, \quad |R| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \ll \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Задачи

p10.1. В главном и следующем приближениях по $\varepsilon \ll 1$ вычислить интегралы

$$(a) \int_{\varepsilon}^1 e^{-\varepsilon x^2} \sin x dx; \quad (b) \int_0^{\varepsilon} \sqrt{x^2 + \varepsilon} \sin x^3 dx.$$

p10.2. Вычислить интеграл $\int_1^{10} x^x dx$ с погрешностью менее 2%.

p10.3. Вычислить среднее значение $\cos^{100} x$ на его периоде с погрешностью менее 1%.

Задачи для домашней работы

h10.1. В главном и следующем приближениях по $\varepsilon \ll 1$ вычислить интегралы

$$(a) \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} e^x \operatorname{tg} \varepsilon x^3 dx; \quad (b) \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\sin x^2 + \varepsilon}; \quad (c) \int_0^{\varepsilon} x^x dx.$$

h10.2. Вычислить с погрешностью менее 5%:

$$(a) e^{-2^{2n}} \int_1^4 e^{x^n} dx, \quad n > 2; \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} (x^4 + 4x + 4)^{-100} dx.$$

h10.3. Доказать соотношение (18) и вывести $I''(0)$.

§11. Интегрирование по частям. Интегралы Фурье

«Удав увы в аду».

Мнемонический способ запоминания формулы интегрирования по частям.

t11.1. Интегрирование по частям

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \quad (19)$$

позволяет определить главное значение интеграла в том случае, если второе слагаемое в правой части оказывается намного меньше первого. Для выполнения этого условия требуется корректный выбор функций $u(x)$ и $v(x)$.

t11.2. Если функция $f(x)$ достаточно дифференцируема, тогда

$$\int_a^b f(x)e^{ikx} dx = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{i^{n+1}}{k^{n+1}} (f^{(n)}(a)e^{ika} - f^{(n)}(b)e^{ikb}) + o(k^{-N}), \quad k \rightarrow \infty.$$

В частности,
$$\int_0^{\infty} f(x) \sin kx dx = \frac{f(0)}{k} + O(k^{-2}), \quad k \rightarrow \infty.$$

Задачи

p11.1. Вычислить разложение при $x \gg 1$ функции ошибок
$$\text{Erf}(x) = \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt.$$
 Вычислить $\text{Erf}(2)$ с точностью 5%.

p11.2. Вычислить главные и следующие члены разложений интеграла Стильтьеса
$$S(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{x+t}$$
 при $x \gg 1$ и $x \ll 1$.

p11.3. Показать с помощью интегрирования по частям, что

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx = -\frac{f'(0)}{k^2} + O(k^{-4}), \quad k \rightarrow \infty,$$

если функция $f(x)$ достаточно дифференцируема и $x^3 f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Задачи для домашней работы

h11.1. Вычислить разложение при $x \gg 1$ интегралов Френеля

$$F_1(x) = \int_x^{\infty} \cos(\theta^2) d\theta, \quad F_2(x) = \int_x^{\infty} \sin(\theta^2) d\theta.$$

h11.2. Вычислить разложение при $x \gg 1$ неполной гамма-функции
$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt.$$
 Вычислить $\Gamma(1/5, 5)$ с точностью 5%.

h11.3. Вычислить главное значение $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} dx}{\sqrt{1+|x|^N}}$, при $k \gg 1$:

(a) $N = 2n - 1, n \in \mathbb{N}$; (b) $N = 2n, n \in \mathbb{N}$.

h11.4. Доказать утверждения из пункта **t11.2**, пользуясь интегрированием по частям.

h11.5. Показать, что если функция $f(x)$ достаточно дифференцируема, $f(b) = f'(b) = \dots = f^{(N-1)}(b) = 0, 0 < \gamma < 1$, тогда

$$\int_a^b \frac{f(x)e^{ikx} dx}{(x-a)^{1-\gamma}} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n+\gamma)}{n!(-ik)^{n+\gamma}} f^{(n)}(a)e^{ika} + O(k^{-N}), \quad k \rightarrow \infty.$$

§12. Метод стационарной фазы

t12.1. *Метод стационарной фазы.* Если функции $f(x)$ и $\phi(x)$ достаточно дифференцируемы, причем $f(x)$ — вещественно-значная и $x = a$ ее стационарная точка, то есть $f'(a) = 0, f''(a) \neq 0$ и $f'(x) \neq 0$ при $a < x \leq b$, то

$$\int_a^b \phi(x)e^{ikf(x)} dx = \sqrt{\frac{\pi i}{2kf''(a)}} \phi(a)e^{ikf(a)} + O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Здесь вещественная часть алгебраического квадратного корня положительна.

Замечание 1: Точка x_0 , в которой $f'(x_0) = 0$, называется *точкой стационарной фазы*, поскольку в этой точке «останавливается» фаза функции $e^{ikf(x)}$.

Замечание 2: Если в пункте **t12.1** первые $(N-1)$ производных в точке $x = a$ равны нулю, $f^{(n)}(a) = 0$ при $n = 1, 2, \dots, (N-1)$, и $f^{(N)}(a) \neq 0$, то исследуемый интеграл имеет порядок $O(k^{-N-1})$. В

частности, при $N = 3$ получим

$$\int_a^b \phi(x) e^{ikf(x)} dx = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \sqrt[3]{\frac{6i}{kf'''(a)}} \phi(a) e^{ikf(a)} + O(k^{-2/3}), \quad k \rightarrow \infty.$$

Замечание 3: Если на интервале интегрирования функция $f(x)$ не имеет стационарных точек, то пользуясь методом интегрирования по частям (сравните с **t11.2**) можно показать, что:

$$\int_a^b \phi(x) e^{ikf(x)} dx = \frac{\phi(b) e^{ikf(b)}}{ikf'(b)} - \frac{\phi(a) e^{ikf(a)}}{ikf'(a)} + O(k^{-2}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Задачи

p12.1. Доказать утверждение из пункта **t12.1**.

p12.2. Вычислить главное приближение интеграла

$$\int_1^{\infty} e^{ik(x^2-2x)} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

p12.3. Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \cos [100(x^4 - x)] dx$ с точностью 10%.

Задачи для домашней работы

h12.1. Вычислить первый член асимптотики интегралов:

$$(a) \int_0^1 \sin [k(2x^3 - x^2)] dx; \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} \cos (kx^2 - 2x + 1) dx;$$

$$(c) \int_0^{\infty} e^{ik[x-3x^2(1-x)]} dx; \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

h12.2. Вычислить $\int_0^{\infty} x^{100i} \sin (50x) dx$ с точностью 10%.

h12.3. Доказать утверждение из замечания 2 к пункту **t12.1**.

§13. Метод Лапласа. Понятие о методе перевала

*Математика — единственный совершенный метод,
позволяющий провести самого себя за нос.*

Альберт Эйнштейн

t13.1. *Метод Лапласа.* Пусть вещественно-значные функции $f(x)$ и $\phi(x)$ достаточно дифференцируемы и функция $f(x)$ имеет в точке a локальный максимум, причем $f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$ и $f(x) < f(a)$ при $a < x \leq b$, тогда при $p \rightarrow +\infty$ верно, что

$$\int_a^b \phi(x) e^{pf(x)} dx = e^{pf(a)} \left[\phi(a) \sqrt{\frac{\pi}{2p|f''(a)|}} + O(p^{-1}) \right]. \quad (22)$$

Замечание: Если на отрезке от a до b функция $f(x)$ имеет в точке a максимум, но $f'(a) < 0$, то

$$\int_a^b \phi(x) e^{pf(x)} dx = \frac{\phi(a) e^{pf(a)}}{p|f'(a)|} + O(p^{-2}), \quad p \rightarrow +\infty. \quad (23)$$

t13.2. *Метод перевала.* Рассмотрим интеграл вида

$$I(p) = \int_{\gamma} \phi(z) e^{pf(z)} dz, \quad \text{при } p \rightarrow \infty, \quad (24)$$

где $f(z)$ и $\phi(z)$ — комплексно-значные функции, аналитические в некоторой области комплексной плоскости, содержащей кривую интегрирования γ . Такой интеграл может быть вычислен асимптотически, используя *метод перевала*, суть которого может быть изложена следующим образом:

(а) Определим точки *перевала*⁶, в которых $f'(z) = 0$.

⁶Название «перевал» происходит из географической терминологии. Если рассмотреть функцию двух переменных $\psi(x, y) = |\phi(x + iy) e^{pf(x+iy)}|$ как функцию географической высоты над уровнем моря в (x, y) , то точки, где $f'(z) = 0$, являются седловыми для $\psi(x, y)$, или так называемыми точками перевала.

- (b) Построим новый контур интегрирования γ' так, чтобы его начало и конец совпадали с началом и концом γ , проходящий определенным образом⁷ через некоторые из точек *перевала*.
- (c) Перейти от γ к γ' , пользуясь теоремой Коши⁸.
- (d) Вычислить асимптотически интеграл, опираясь на метод Лапласа. Основную роль при расчетах играет интеграл по окрестностям точек *перевала*.

Замечание: Здесь изложена лишь общая идея метода перевала, более подробное его изложение с примерами имеется во многих учебниках и монографиях, в частности, [1, 4–6]. Основные и часто значительные трудности связаны с поиском новой кривой интегрирования γ' . Существует ряд модификаций метода перевала, предлагающие алгоритм эффективного поиска γ' . Среди прочих стоит отметить метод Ван-дер-Вардена, подробное изложение которого может быть найдено в [7].

Задачи

p13.1. Доказать утверждение из пункта **t13.1**.

p13.2. Вычислить асимптотику для функций Бесселя

$$I_n(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{p \cos x} \cos nx dx, \text{ при } p \rightarrow +\infty.$$

p13.3. Доказать асимптотическую формулу Стирлинга

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx \approx \sqrt{2\pi p} p^p e^{-p}, \text{ при } p \rightarrow +\infty.$$

⁷Направление, в котором γ' будет проходить через точку перевала, может быть выбрано неоднозначно. Например, в основе метода наискорейшего спуска требуется, чтобы скорость убывания функции $|\phi(z)e^{pf(z)}|$ при удалении от точки перевала вдоль γ' было максимально возможным.

⁸Если в области, ограниченной кривыми γ и γ' , функции $\phi(x)$ и $f(x)$ аналитичны, то интеграл по замкнутому контуру $\gamma \cup \gamma'$ равен нулю.

p13.4. Вычислить главное значение интеграла

$$I(p) = \int_0^{\infty} e^{p(x+ix-x^3)} dx, \text{ при } p \rightarrow +\infty.$$

Задачи для домашней работы

h13.1. Вычислить при $p \rightarrow +\infty$ главное значение $\int_0^{\pi} x^p \sin x dx$.

h13.2. Показать, что при $p \rightarrow +\infty$ имеют место следующие асимптотические разложения:

$$(a) \int_0^1 e^x x^p (1+x^2)^{-p} dx \approx \sqrt{\frac{\pi}{2p}} \frac{e}{2^p};$$
$$(b) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-p(x^2+y^2)} (1-x-y)^p dx dy \approx \frac{1}{p^2} - \frac{7}{p^3}.$$

h13.3. Вычислить при $p \rightarrow +\infty$ главное значение

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{px(6-x^3)} \sin [px^2(1+4x)] dx.$$

h13.4. Доказать утверждение из замечания к пункту **t13.1**.

h13.5. Записать асимптотику интеграла в методе Лапласа, если функция $f(x)$ имеет в точке a максимум, $f'(x) < 0$ для всех $x > a$ и $x \leq b$, $f'(a) = f''(a) = 0$ и $f'''(a) \neq 0$ (сравни с замечанием 2 к пункту **t12.1**).

Решения. Указания. Ответы

Каждый может ошибиться, а если о чем-нибудь очень долго размышлять, уж наверняка ошибешься.

Ярослав Гашек

Решения

p1.1. Воспользуемся формулой Тейлора и формулой для остаточного члена (1) для функции $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + R_0(x) = 1 + \frac{x}{2} + R_1(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_2(x).$$

Тогда для числа A_1 получим следующие приближенные значения ($0 \leq \xi \leq 1$):

$$A_{1,0} = 1, \quad A_{1,1} = 1 + \frac{1}{2} = 1.5, \quad A_{1,2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 1.375,$$
$$|R_0| = \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} \leq 0.5, \quad |R_1| = \frac{1}{8(1+\xi)^{3/2}} \leq 0.13, \quad |R_2| \leq 0.063.$$

Аналогично для числа $A_2 = \sqrt{4-2} = 2\sqrt{1-1/2}$ получим следующие приближенные значения ($0 \leq \xi \leq 1/2$):

$$A_{2,0} = 2, \quad A_{2,1} = 2 - \frac{1}{2} = 1.5, \quad A_{2,2} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = 1.4375,$$
$$|R_0| = \frac{1}{2\sqrt{1-\xi}} \leq 0.71, \quad |R_1| = \frac{1}{16(1-\xi)^{3/2}} \leq 0.18, \quad |R_2| \leq 0.088.$$

p1.2. По формуле приведения $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$. Теперь можно разложить $\sin(\pi - 3)$ по формуле Тейлора:

$$\sin(\pi - 3) = (\pi - 3) - \frac{(\pi - 3)^3}{3!} + R_4,$$
$$r_4 = \frac{|R_4|}{\sin(\pi - 3)} = \frac{(\pi - 3)^5 \cos \xi}{5! \sin(\pi - 3)} \leq \frac{(\pi - 3)^5}{120 \sin(\pi - 3)} \approx 3.4 \cdot 10^{-6}.$$

Замечание: Обратим внимание, что разложение $\sin 3 = 3 - 3^3/3! + 3^5/5! + \dots$ даст достаточную точность только на члене $3^{17}/17!$.

p1.3. Величина мощности, выраженная в децибелах, определяется как $10 \lg(P_1/P_0)$. Тогда сигнал в 1 дБ — это $P_1/P_0 = 10^{1/10}$. Проведем вычисления:

$$10^{1/10} = e^{\frac{1}{10} \ln 10} = 1 + \frac{1}{10} \left(2 + \ln \frac{10}{e^2} \right) + R_1 = 1 + \frac{1}{10} \left(2 + \frac{10}{e^2} - 1 + R'_1 \right) + R_1.$$

Оценим погрешность $R = R_1 + R'_1/10$:

$$\begin{aligned} |R| &\leq |R_1| + \frac{|R'_1|}{10} = \frac{\ln^2 10}{2 \cdot 10^2} e^\xi \Big|_{\xi \leq \frac{1}{10} \ln 10} + \left(\frac{10}{e^2} - 1 \right)^2 \frac{1}{20(1 + \xi')^2} \Big|_{\xi' \geq 0} \leq \\ &\leq \frac{\ln^2 10}{200} 10^{1/10} + \frac{1}{20} \left(\frac{10}{e^2} - 1 \right)^2 < 0.045. \end{aligned}$$

В результате имеем:

$$\frac{P_1}{P_0} = 10^{1/10} = \frac{11}{10} + \frac{1}{e^2} + R = 1.24 \pm 4\%.$$

p2.1. Разложим $F(x_0 + \Delta x, \varepsilon)$ по формуле Тейлора, сохраняя только члены разложения порядка Δx и ε :

$$0 = F(x_0 + \Delta x, \varepsilon) \approx F(x_0, 0) + F'_x(x_0, 0)\Delta x + F'_\varepsilon(x_0, 0)\varepsilon.$$

Поскольку $F(x_0, 0) = 0$, получаем, что $\Delta x = -\varepsilon F'_\varepsilon(x_0, 0)/F'_x(x_0, 0)$. Последнее и доказывает равенство (2).

p2.2a. Представим данное по условию уравнение в виде

$$F(x, \varepsilon) = \sin(x - \varepsilon) - \exp(2\varepsilon x) + 1 = 0.$$

Несложно убедиться, что $F(0, 0) = 0$. Таким образом, в нулевом приближении корень уравнения $x_0 = 0$. Для того, чтобы получить решение в интервале $0 < x < 1$, воспользуемся равенством (2):

$$x \approx x_0 - \varepsilon \frac{-\cos(x_0 - \varepsilon) - 2x_0 \exp(2\varepsilon x_0)}{\cos(x_0 - \varepsilon) - 2\varepsilon \exp(2\varepsilon x_0)} \Big|_{\varepsilon=0} = \varepsilon.$$

p2.2b. В нулевом приближении, при $\varepsilon = 0$, корень данного уравнения $x_0 = 0$. Определим корни уравнения в первом приближении. Пусть корень $x \approx x_0 + x_1 = x_1$, где x_1 — первая поправка и $x_1 \ll 1$. Разложим данное уравнение, сохраняя в нем слагаемые больше и порядка x_1^2 и ε^2 :

$$0 = \sin(x^2 + \varepsilon^2) - \exp(2\varepsilon x) + 1 \approx x_1^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon x_1 = (x_1 - \varepsilon)^2.$$

Следовательно, в первом приближении корень исходного уравнения $x \approx x_0 + x_1 = \varepsilon$. По условию требуется найти два различных корня уравнения, поэтому необходимо вычислить второе приближение. Пусть корень $x \approx x_0 + x_1 + x_2 = \varepsilon + x_2$, где x_2 — вторая поправка и $x_2 \ll x_1$. Разложим данное уравнение, сохраняя в нем слагаемые больше и порядка ε^4 и x_2^2 :

$$0 = \sin(x^2 + \varepsilon^2) - \exp(2\varepsilon x) + 1 \approx x_2^2 - \varepsilon^4.$$

Следовательно, $x \approx \varepsilon \pm \varepsilon^2 \sqrt{2}$.

p2.3. Представим данное уравнение в виде

$$F(x, \varepsilon) = \sin x - \varepsilon e^{-x} = 0, \text{ где } \varepsilon = 1/4.$$

Затем, пользуясь схемой, описанной в решении **p2.2b**, найдем:

$$x = \varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{5}{3}\varepsilon^3 - \frac{10}{3}\varepsilon^4 + R \Big|_{\varepsilon=1/4} = 0.20 \pm 0.01.$$

Замечание 1: Погрешность $|R|$ была оценена нестрогим образом, как следующий член разложения $221\varepsilon^5/30$. Этот способ строго верен только, если разложение знакочередующееся.

Замечание 2: Предложенный способ позволяет найти решение уравнения с любой заданной степенью точности, однако для точности 10^{-2} уравнение можно было решить другим способом. Поскольку решение уравнения близко к нулю, можно было разложить по малости x :

$$0 = 4 \sin x - e^{-x} \approx -1 + 5x.$$

Отсюда $x = 0.2$. Недостаток такого способа в том, что для достаточно больших точностей потребуется решать уравнение высокой степени.

р2.4. Из пересечения графиков функций $f(x) = x$ и $g(x) = \operatorname{tg} x$ ясно, что уравнение $x = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечное число решений. Перенумеруем эти решения: $x^{(0)} = 0$ и $x^{(\pm n)}$ — точки пересечения, лежащие на интервалах $[\pm \pi n; \pm \pi(n + 1/2)]$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, при этом $x^{(-n)} = -x^{(n)}$. Найдем $x^{(n)}$, раскладывая по большому параметру n . В нулевом приближении $x^{(n)} \approx x_0^{(n)} = \pi(n + 1/2)$. Во втором приближении $x^{(n)} \approx x_0^{(n)} + x_1^{(n)}$. Подставим в уравнение и разложим при $n \gg 1$:

$$0 = x^{(n)} - \operatorname{tg} x^{(n)} \approx \pi(n + 1/2) + \operatorname{ctg} x_1^{(n)} \approx \pi(n + 1/2) + [x_1^{(n)}]^{-1}.$$

Таким образом, $x^{(n)} \approx \pi(n + 1/2) - \pi^{-1}(n + 1/2)^{-1}$ в первом приближении. Несмотря на то, что при выводе этого ответа использовалось условие $n \gg 1$, разложение работает даже для $x^{(1)}$. Действительно, ошибка в вычислении $x^{(1)}$ составляет около 0.2%.

р3.1a. Введем новое обозначение $\varepsilon = \mu^{-1} \ll 1$. Тогда данное уравнение запишем в виде $F(x, y, \varepsilon) = \operatorname{arctg}(y + \varepsilon^{-1}) - y + x\varepsilon = 0$. Найдем функцию в нулевом приближении ($\varepsilon \rightarrow 0$): $y = f_0(x) = \pi/2$. Затем воспользуемся равенством (4):

$$f_\varepsilon(x) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{x - [\varepsilon^2 + (y\varepsilon + 1)^2]^{-1}}{-1 + \varepsilon^2 [\varepsilon^2 + (y\varepsilon + 1)^2]^{-1}} \Big|_{\varepsilon=0, y=\pi/2} \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2} + (x - 1)\varepsilon.$$

Запишем $f_\varepsilon(x) = \pi/2 + (x - 1)\varepsilon + g_2(x)$ для вычисления второго приближения. Здесь $g_2(x)$ — вторая поправка, $|g_2(x)| \ll \varepsilon$. Подставим в таком виде в уравнение $F(x, y, \varepsilon) = 0$ и разложим, сохраняя слагаемые больше и порядка $g_2(x)$ и ε^2 : $F(x, f_\varepsilon(x), \varepsilon) \approx \pi\varepsilon^2/2 - g_2(x)$. Следовательно, $f_\varepsilon(x) \approx \pi/2 + (x - 1)\varepsilon + \pi\varepsilon^2/2$.

р3.1b. Сделаем замену $\varepsilon = \mu^{-1} \ll 1$, $x = \varepsilon t$. Тогда запишем уравнение $F(t, y, \varepsilon) = y - \ln [y + \varepsilon^2(t^2 + 1)] - \cos \varepsilon t = 0$. В нулевом приближении $F(t, y, 0) = y - \ln y - 1 = 0$, следовательно,

$y = f_0(t) = 1$. В первом приближении функцию ищем в виде $f_\varepsilon(t) = 1 + f_1(t)$. Подставим в уравнение, разложим по малости $f_1(t)$, сохраняя слагаемые больше и порядка $f_1^2(x)$ и ε^2 , получим:

$$0 = F(t, f_\varepsilon(t), \varepsilon) \approx f_1^2(t)/2 - (1 + t^2/2)\varepsilon^2.$$

Значит, $f_\varepsilon(t) = 1 \pm \varepsilon\sqrt{t^2 + 2}$ или $f_\varepsilon(x) = 1 \pm \sqrt{x^2 + 2\varepsilon^2}$.

р3.2а. Сделаем замену переменных $w = y^{-1}$ и $z = x$ в исходном уравнении. Тогда исходное уравнение примет вид $w = z/e^{-z}$, и мы можем воспользоваться формулой обращения Лагранжа (5) и (6) с $f(x) = e^{-x}$. Получаем

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} e^{-kz} \right\} \Big|_{z=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k^{k-2} w^k}{(k-1)!}$$

или $x = y^{-1} - y^{-2} + 3y^{-3}/2 + \dots$

р3.2б. Если $y \ll 1$, то $x \gg 1$. Запишем данное уравнение в виде: $x = \ln(1/y) - \ln x$. Поскольку $x \gg \ln x$, то в нулевом приближении: $x \approx \ln(1/y)$. В первом приближении $x = \ln(1/y) + x_1$. Раскладывая данное уравнение, получаем: $x_1 \approx -\ln \ln(1/y)$. В результате имеем: $x = \ln(1/y) - \ln \ln(1/y) + o(\ln \ln(1/y))$.

р4.1а. Перейдем от суммы к интегралу согласно равенства (7):

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right) = 2\sqrt{n+1} - 2 + R_n,$$

где R_n является частью сходящегося ряда и может быть оценен согласно равенства (8):

$$R_n = S + O(n^{-1/2}), \text{ где } S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2k - 2\sqrt{k^2 + k}}{\sqrt{k}} \approx 0.5396.$$

р4.1б. Действуя аналогично **р4.1а**, перейдем от суммы к интегралу, а затем оценим R_n согласно равенства (8):

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{\ln^2(1+n)}{2} + S + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Здесь $S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln k}{k} + \frac{\ln^2 k - \ln^2(1+k)}{2} \right) \approx -0.0728$.

p4.1c. Поскольку каждое слагаемое суммы более чем в два раза превосходит предыдущее слагаемое, то основное значение ряда набирается при $l = n - k \ll n$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2^k \ln k &= 2^n \sum_{l=0}^{n-1} 2^{-l} \ln(n-l) \approx \\ &\approx 2^n \sum_{l=0}^{n-1} 2^{-l} \left(\ln n - \frac{l}{n} + \frac{l^2}{2n^2} + \dots \right) \approx 2^n \left(\ln n - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

p4.1d. Сгруппируем слагаемые в пары и разложим каждый член нового ряда по большому параметру $(n + 2m)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(n+k)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\ln(n+2m)} - \frac{1}{\ln(n+2m+1)} \right] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2m) \ln^2(n+2m)} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 + \ln(n+2m)}{2(n+2m)^2 \ln^3(n+2m)} + \dots = \end{aligned}$$

В полученных рядах перейдем от сумм к интегралам, учитывая, что в первом ряду нужно сохранить главное и следующее приближение, а во втором достаточно оставить только главное приближение:

$$\begin{aligned} &= \int_n^{\infty} \frac{dx}{2x \ln^2 x} + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+2m) \ln^2(n+2m)} - \int_{n+2m}^{n+2m+2} \frac{dx}{2x \ln^2 x} \right] - \\ &- \int_n^{\infty} \frac{(2 + \ln x) dx}{4x^2 \ln^3 x} + \dots = \frac{1}{2 \ln n} + \int_n^{\infty} \frac{(2 + \ln x) dx}{2x^2 \ln^3 x} - \frac{1}{4n \ln^2 n} + \dots \end{aligned}$$

Окончательно имеем $(2 \ln n)^{-1} + (4n \ln^2 n)^{-1} + \dots$

p5.1. Рассмотрим, как ведет себя функция в различных предельных ситуациях:

- (a) $y(x \rightarrow +\infty) \approx e^{-x}$, $y(x \rightarrow -\infty) \approx -1 - e^x$, $y(x \rightarrow 0) \approx 1/x - 1/2$;
 (b) $y(x \rightarrow \pm\infty) \approx \pm x + 1/2$, $y(x \rightarrow 0) \approx \sqrt{|x|}$.

Изобразим на координатной плоскости асимптотики штриховыми линиями, а затем сплошной линией нарисуем саму функцию.

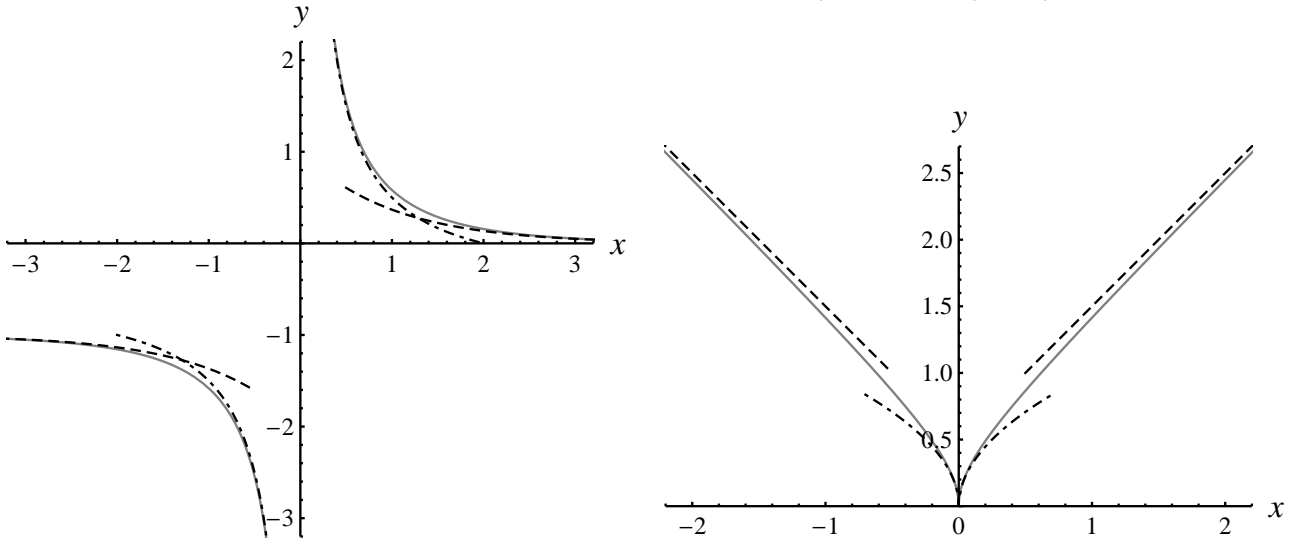


Рис. 1. Графики к задаче **п5.1**

п5.2. Рассматриваемая точка расположена на экране на расстоянии $x = S \operatorname{tg} \alpha$ от проекции на него середины между источниками. Расстояние от источников до этой точки определяется из геометрических рассуждений: $l_{1,2} = \sqrt{S^2 + (x \pm d/2)^2}$. Считая $d \ll S$, можно разложить $\Delta l = l_1 - l_2 \approx d \sin \alpha (1 - d^2 \cos^4 \alpha / 8S^2)$.

п5.3. Силу взаимодействия шаров можно представить в виде интеграла силы взаимодействия пластин, считая, что небольшие участки шаров, находящиеся друг напротив друга, притягиваются как участки пластин. Введем координаты: ось z направлена через центры шаров, плоскость xOy — плоскость симметрии системы. Разделим поверхность шаров на круговые полоски, площадью

$$dS_x = 2\pi x R \left[\arcsin \frac{x + dx}{R} - \arcsin \frac{x}{R} \right] \approx \frac{2\pi x R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Расстояние между этими участками равно:

$$a_x = a_0 + 2R - 2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Таким образом, сила взаимодействия между шарами равна:

$$F_{\text{шар}} = \int \frac{F(a_x)}{S} dS \approx \int_0^R F(a_0 + 2R - 2\sqrt{R^2 - x^2}) \frac{2\pi x R dx}{S\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Учтем, что основное значение интеграл набирает в окрестности наиболее близких точек шаров, то есть когда $x \ll R$. Тогда разложим подынтегральное выражение:

$$F_{\text{шар}} \approx \frac{\pi R}{S} \int_0^R F\left(a_0 + \frac{x^2}{R}\right) d\left(a_0 + \frac{x^2}{R}\right) \approx \frac{\pi R}{S} \int_{a_0}^{\infty} F(a) da = \frac{\pi R \phi_0}{3a_0^3}.$$

р6.1. Точное решение уравнения может быть найдено методом вариации постоянной:

$$x(t) = (e^\varepsilon + 2\varepsilon)e^{\frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon}} - 2(\varepsilon + \sin \varepsilon t) \approx e^t + (3e^t - 2 - 2t)\varepsilon + \frac{3 - t^3}{6}e^t\varepsilon^2.$$

Найдем теперь асимптотическое решение в нулевом приближении. Для этого положим $\varepsilon = 0$ и получим $\dot{x}_0(t) = x_0(t)$, $x_0(0) = 1$, то есть $x_0(t) = e^t$. Для определения следующего приближения представим $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$, где $x(t)$ — поправка. Подставляем в исходное уравнение, раскладываем и сохраняем слагаемые порядка ε и $x_1(t)$: $\dot{x}_1(t) \approx x_1(t) + 2t\varepsilon$, $x_1(0) \approx \varepsilon$. Следовательно, $x_1(t) \approx (3e^t - 2 - 2t)\varepsilon$. Далее действуем аналогично: $x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t)$. Сохраняя слагаемые порядка ε^2 и $x_2(t)$, получаем $\dot{x}_2(t) \approx x_2(t) - t^2 e^t \varepsilon^2 / 2$, $x_2(0) \approx \varepsilon^2 / 2$, значит, $x_2(t) \approx (3 - t^3)e^t \varepsilon^2 / 6$. Полученные приближения согласуются с разложением точного решения.

р6.2. В главном приближении, $\mu \rightarrow \infty$, система имеет вид: $\dot{x}_0(t) = \pi$, $x_0(1) = \pi$, $\dot{y}_0(t) = 0$, $y_0(1) = 0$. Следовательно, ее решение: $x_0(t) = \pi t$ и $y_0(t) = 0$. В следующем приближении представляем неизвестные в виде $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$ и $y(t) = y_0(t) + y_1(t)$ и раскладываем данную систему: $\dot{x}_1(t) \approx -2/(\mu\pi t) - y_1(t)$, $\dot{y}_1(t) \approx e^{\pi t}/\mu$, $x_1(1) = y_1(1) = 0$. В результате имеем $x(t) \approx \pi t - (2\pi \ln t + e^{\pi t})/\mu\pi^2$ и $y(t) \approx e^{\pi t}/\mu\pi$.

р6.3. Рассмотрим случай $r \rightarrow 0$. При этом можно отбросить E и $U(r)$ по сравнению с $l(l+1)/r^2$: $r^2\psi''(r) + 2r\psi'(r) - l(l+1)\psi(r) = 0$. Решение этого уравнения будем искать в виде $\psi(r) = r^k$. Тогда приходим к квадратному уравнению $k^2 - k + 2k - l(l+1) = 0$. Его решения $k_1 = l$ и $k_2 = -(l+1)$. Второе решение не обладает физическим смыслом, поскольку неограниченно растет при $r \rightarrow 0$. В результате имеем $\psi(r) = C_1 r^l$. Для второго предельного случая $r \rightarrow \infty$ уравнение в главном приближении сведется к: $\psi'' + E\psi = 0$. Его решение (физически осмысленное) $\psi(r) = C_2 e^{-r\sqrt{|E|}}$.

р6.4. Правая часть уравнения $x^3 \gg 1$. Следовательно, левая часть уравнения тоже должна быть велика. При этом можно искать решение, предполагая, что каким-либо из трех членов данного уравнения можно пренебречь. Пусть $|y^3(x)| \ll |y'(x)|$, тогда $y'(x) \approx x^3$, значит, $y(x) \approx x^4/4 + C$. При этом мы видим, что $|y^3(x)| \gg |y'(x)|$, значит, наше предположение неверно. Пренебрежем теперь членом x^3 , то есть $x^3 \ll |y'(x)|$. Тогда $y'(x) \approx -y^3(x)$ и $y(x) \approx \pm(2x - C)^{-1/2}$. Но при этом снова нарушается наше предположение, так как $|y'(x)| \ll x^3$. Рассмотрим третью возможность, $y'(x) \ll y^3(x)$. В этом случае $y(x) \approx x$ и наше предположение верно, следовательно, в главном приближении это решение данной задачи. Найдем следующее приближение. Для этого представим $y(x) = x + y_1(x)$. Подставляя его в таком виде в уравнение и сохраняя только слагаемые больше и порядка $y_1(x)$ и 1, получим: $y_1' + 3x^2 y_1 = -1$. Это линейное уравнение может быть решено в квадратурах точно, но мы найдем его асимптотическое решение способом, использованным выше для главного приближения. Пусть $|y_1'(x)| \ll 1$ (другие предположения приводят к противоречиям), тогда $y_1 \approx -1/3x^2$. Значит, $y(x) \approx x - 1/(3x^2)$.

р7.1. Точное решение уравнение может быть найдено методом вариации постоянной: $x(t) = (e^{-t} - e^{-t/\varepsilon})/(1 - \varepsilon)$. Решим данное уравнение асимптотически. Для этого найдем регулярное $\bar{x}(t)$ и приграничное $\xi(\tau)$ решения в главном приближении ($\tau = t/\varepsilon$).

Рассматривая данное уравнение не вблизи границы, можем положить $\xi_0(\tau) = 0$ и $\varepsilon = 0$. Тогда $\bar{x}_0(t) = e^{-x}$. Приграничное решение найдем, рассматривая уравнение вблизи границы. Тогда в регулярные функции можно подставить $t = 0$, а в $\xi_0(\tau)$ сохранить τ : $\dot{\xi}_0(\tau) + \xi_0(\tau) = 0$. При этом граничное условие есть $\xi_0(0) = x(0) - \bar{x}_0(0) = -1$. В результате имеем $\xi_0(\tau) = -e^{-\tau}$. Окончательно, $x(t) \approx e^{-t} - e^{-t/\varepsilon}$, что совпадает с главным членом разложения точного решения.

р7.2. Для того чтобы найти регулярное решение, рассмотрим систему не вблизи границы и положим $\varepsilon = 0$: $2\dot{\bar{x}}_0(t) = \bar{x}_0(t) + \bar{y}_0(t)e^t$ и $0 = 1 - \bar{x}_0(t)\bar{y}_0(t)$. Начальным условием для \bar{x}_0 является $\bar{x}_0(0) = 1$. В результате получим $\bar{x}_0(t) = (1+t)^{1/2}e^{t/2}$ и $\bar{y}_0(t) = (1+t)^{-1/2}e^{-t/2}$. Для определения приграничного решения рассмотрим данную систему вблизи границы. В регулярных функциях подставим $t = 0$, в нерегулярной ввести $\tau = t/\varepsilon$: $\dot{\eta}_0(\tau) = \bar{x}_0(0)\eta_0(\tau)$ и $\xi_0(\tau) = 0$. Граничное условие имеет вид $\eta_0(0) = y(0) - \bar{y}_0(0) = 1$. Тогда $\eta_0(\tau) = e^{-\tau}$. В итоге имеем $x_0(t) = (1+t)^{1/2}e^{t/2}$ и $y_0(t) = (1+t)^{-1/2}e^{-t/2} + e^{-t/\varepsilon}$.

р8.1. Решение уравнения (14) будем искать в виде колебаний с переменной амплитудой и фазой: $x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$. Тут введено две неизвестные функции, $a(t)$ и $\varphi(t)$, вместо одной $x(t)$. Потребуем, чтобы $\dot{x}(t) = -\omega_0 a(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t))$, тогда производные $\dot{a}(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ оказываются связаны: $\dot{A}(t) \cos \psi - A(t) \dot{\varphi} \sin \psi = 0$, где $\psi = \omega_0 t + \varphi(t)$. Учитывая, что $\ddot{x} = -\omega_0 \dot{A} \sin \psi - [\omega_0 + \dot{\varphi}] A \omega_0 \cos \psi$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -\dot{a}\omega_0 \sin \psi - a\omega_0 \dot{\varphi} \cos \psi = \varepsilon f[a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi], \\ \dot{a} \cos \psi - a\dot{\varphi} \sin \psi = 0, \end{cases}$$

откуда получаем, что

$$\begin{cases} \dot{a} = -\varepsilon \omega_0^{-1} \cdot f[a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi] \sin \psi, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon (a\omega_0)^{-1} f[a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi] \cos \psi. \end{cases}$$

Если ε достаточно мало, то амплитуда $a(t)$ и фаза $\varphi(t)$ оказываются медленно меняющимися функциями времени. Это означает, что в течение периода одного колебания в главном приближении можно считать $a(t)$ и $\varphi(t)$ постоянными величинами. Тогда можно

усреднить $\dot{a}(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ по времени по одному периоду $2\pi\omega_0^{-1}$ или, что тоже самое, усреднить по фазе ψ по интервалу длиной 2π . В результате получим систему уравнений (15)-(17).

р8.2. Воспользуемся уравнениями (15)-(17):

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} a\omega_0 \sin^2 \psi d\psi = -\frac{\varepsilon a}{2}, \quad a(t) = a_0 e^{-\varepsilon t/2},$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2\pi a\omega_0} \int_0^{2\pi} a\omega_0 \sin \psi \cos \psi d\psi = 0, \quad \varphi(t) = \varphi_0.$$

В результате имеем $x(t) \approx a_0 e^{-\varepsilon t/2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

р8.3а. Представив решение в виде $x(t) \approx a_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + x_1(t)$, где $\omega \approx \omega_0 + \omega_1$, подставим его в исходное уравнение и разложим, сохраняя главное приближение и поправки порядка x_1 , ω_1 и ε . Для отдельных слагаемых получим:

$$\ddot{x} \approx -a_0\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) + \ddot{x}_1, \quad \varepsilon x^3 \approx \varepsilon a_0^3 \cos^3(\omega t + \varphi_0),$$

$$\omega_0^2 x \approx \omega^2 x - 2\omega\omega_1 x \approx a_0\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega^2 x_1 - 2a_0\omega\omega_1 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Окончательно запишем:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 \approx 2a_0\omega_0 \left(\omega_1 - \frac{3\varepsilon a_0^2}{8\omega} \right) \cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{3\varepsilon a_0^3}{4} \cos(3\omega t + 3\varphi_0).$$

Первое слагаемое в правой части является резонансным, то есть будет вносить в $x_1(t)$ линейно растущее слагаемое. Поскольку мы ищем поправку к ограниченной функции, то таких растущих решений быть не должно. Это означает, что $\omega_1 = 3\varepsilon a_0^2/8\omega_0$ и резонансное слагаемое обращается в ноль. После чего x_1 можно искать в виде $b \cos(3\omega t + 3\varphi_0)$. Тогда окончательное решение имеет вид: $x(t) \approx a(t) \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $a(t) = a_0 + 3\varepsilon a_0^3 [2 \cos(2\omega t + 2\varphi_0) - 1] / 32\omega_0^2$ и $\omega = \omega_0 + 3\varepsilon a_0^2/8\omega_0$.

р8.3б. Воспользуемся уравнениями (15)-(17):

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^3 \psi \sin \psi d\psi = 0, \quad a(t) = a_0,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega_0} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^4 \psi d\psi = \frac{3\varepsilon a_0^2}{8\omega_0}, \quad \varphi(t) = \frac{3\varepsilon a_0^2 t}{8\omega_0} + \varphi_0.$$

В результате имеем $x(t) \approx a_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, где $\omega = \omega_0 + 3\varepsilon a_0^2/8\omega_0$. Видим, что метод Ван-дер-Поля дал верное выражение для первой

поправки к частоте, но не дал первой поправки к амплитуде.

р9.1. Найдем асимптотическое решение уравнения так, как в задаче **р6.4**. При $|x| \gg 1$ предположим, что $|y'(x)| \ll |x^4|$ и его можно отбросить. Тогда $y(x) = x$ и убеждаемся, что предположение верно. Остальные возможности $|xy(x)| \ll |x^4|$ и $|x^4| \ll |y'(x)|$ приводят к противоречию. При $|x| \ll 1$ предположим, что $|xy(x)| \ll |x^4|$. Тогда $y(x) = x^5/5$ и убеждаемся, что предположение верно и что выполнено начальное условие. Остальные возможности $|y'(x)| \ll |x^4|$ и $|x^4| \ll |y'(x)|$ приводят к противоречию. Нарисуем штриховой линией асимптотики и соединим схематически, как в задаче **р5.1**.

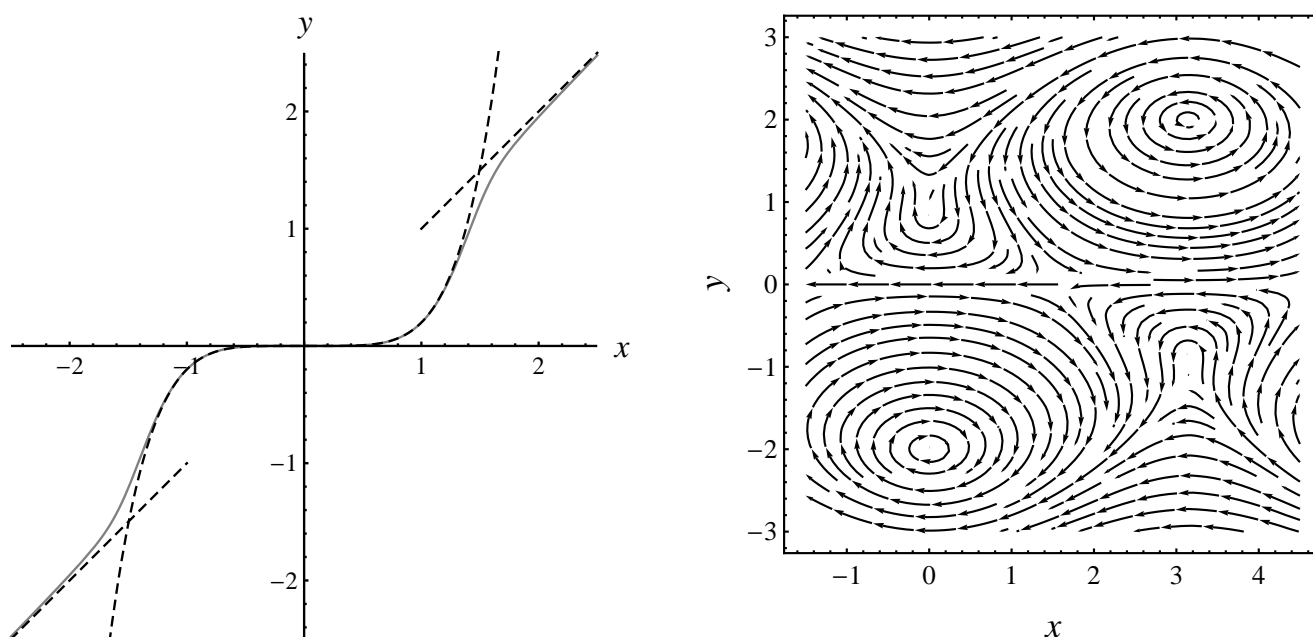


Рис. 2. Графики к задачам **р9.1** (слева) и **р9.2** (справа)

р9.2. Определим особые точки. Для этого положим в исходной системе $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$ и получим уравнения $\sin x = 0$ и $3 - y^2 - 2y^{-1} \cos x = 0$. Тогда $x_k = \pi k$ и $y^3 - 3y + 2(-1)^k = 0$. Решая кубическое уравнение, имеем $y_{1,k} = -2(-1)^k$ и $y_{2,k} = (-1)^k$. Для простоты рассмотрим только следующие пары (x, y) : $(0, 1)$, $(\pi, 2)$. Остальная часть портрета может быть получена отражением $(x, y) \mapsto (x \pm \pi, -y)$ и сдвигом $(x, y) \mapsto (x \pm 2\pi, y)$. Введем в рассмотрение новые переменные $z = x - \pi$, $u = y - 2$. Линеаризовав (полагая z и u малыми), получим систему $\dot{z} = -9u/2$,

$\dot{u} = 2z$. Тогда точка $(\pi, 2)$ — центр, а фазовые траектории в ее окрестности — эллипсы $2z^2 + 9u^2 = \text{const}$ с соотношением полуосей $l_z/l_u = 3/2$. Теперь введем в рассмотрение переменные $z = x$, $u = y - 1$, для которых получим систему $\dot{z} = 0$, $\dot{u} = -2z$. Таким образом, $(0, 1)$ — вырожденная особая точка и фазовые траектории в ее окрестности — вертикальные прямые $x = \text{const}$. Если мы учтем слагаемые второго порядка, получим $\dot{z} = z^2 - 3u^2$, $\dot{u} = -2z$. При $z \ll u$ имеем $\ddot{u} = 6u^2$, или $z^2 - u^3 = \text{const}$. Кроме изученных особых точек отдельного рассмотрения требует прямая $y = 0$, поскольку в уравнении есть слагаемое $fy^{-1}(t) \cos x(t)$. Все траектории вблизи этой прямой стремятся к ней как к асимптотике из-за этого слагаемого. Кроме того, на этой прямой есть выделенные точки $x_l = \pi(l + 1/2)$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В этих точках указанное слагаемое обращается в ноль из-за $\cos x$. Рассмотрим траектории вблизи точки $(x, y) = (\pi/2, 0)$, остальные можно получить указанными сдвигами и отражениями. Для этого введем в рассмотрение новые переменные $z = (x - \pi/2)/y$ и $u = y$, тогда, раскладывая исходное уравнение по малости y (и считая z порядка 1), получим систему: $u\dot{z} = 3 + 4z$, $\dot{u} = -2$. Отсюда $-2\dot{z}/(3 + 4z) = \dot{u}/u$. Интегрирование дает $z + 3/4 = C/u^2$, где $C = \text{const}$. Или, возвращаясь к исходным переменным, получим гиперболы $x - \pi/2 = C/y - 3y/4$. Изобразим все исследованные особенности на фазовой плоскости и дополним портрет в промежуточной области (рис. 2).

p10.1a. Воспользуемся формулами (18):

$$I(\varepsilon) \approx \int_0^1 \sin x dx - \varepsilon \int_0^1 x^2 \sin x dx = 1 - \cos 1 + \varepsilon(2 - \cos 1 - 2 \sin 1).$$

p10.1b. Сделаем замену в интеграле: $y = x/\varepsilon$. Тогда y будет принадлежать интервалу $(0, 1)$ и, следовательно, ε будет содержаться только в подынтегральном выражении. Разложим его в ряд Тейлора, удерживая главное и следующее ненулевое приближение: $\sqrt{\varepsilon^2 y^2 + \varepsilon} \sin(\varepsilon^3 y^3) \varepsilon dy \approx \varepsilon^4 \sqrt{\varepsilon} (y^3 + \varepsilon y^5/2) dy$. Интегрируя его в пределах от 0 до 1, получаем $\varepsilon^4 \sqrt{\varepsilon} (1/4 + \varepsilon/12)$.

p10.2. Очевидно, что значительная часть интеграла набирается в окрестности $x = 10$. Поэтому сделаем замену $y = 10 - x$ и разложим подынтегральную функцию в предположении $y \ll 1$ следующим образом: $(10 - y)^{10-y} = e^{(10-y)\ln(10-y)} \approx e^{10\ln 10 - (1+\ln 10)y}$. Эту функцию мы и будем считать приближением для данной:

$$\int_1^{10} x^x dx \approx \int_0^\infty e^{10\ln 10 - (1+\ln 10)y} dy = \frac{10^{10}}{1 + \ln 10}.$$

Здесь мы заменили верхний предел 10 в интеграле по y на ∞ , поскольку интеграл от 10 до ∞ мал. Оценим погрешность вычислений. Для этого запишем

$$e^{(10-y)\ln(10-y)} \approx e^{10\ln 10 - (1+\ln 10)y} e^{-y^2/20} \approx e^{10\ln 10 - (1+\ln 10)y} (1 - y^2/20).$$

Тогда можно оценить погрешность вычисления:

$$\int_1^{10} x^x dx - \frac{10^{10}}{1 + \ln 10} \approx -\frac{10^9}{2} \int_0^\infty y^2 e^{-(1+\ln 10)y} dy = \frac{10^9}{(1 + \ln 10)^3}.$$

Значит, относительная погрешность равна $10^{-1}(1 + \ln 10)^{-2} \approx 0.9\%$.

p10.3. Период функции $\cos^{100} x$ равен π , поэтому будем усреднять функцию в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Очевидно, что значение функции равно 1 при $x = 0$ и быстро уменьшается при удалении от этой точки. Поэтому попробуем приблизить данную функцию другой, близкой к ней при $|x| \ll 1$. Поскольку $\cos x \approx 1 - x^2/2 + x^4/24$, а $e^{-x^2/2} \approx 1 - x^2/2 + x^4/8$, то функция e^{-50x^2} может служить хорошим приближением для данной функции:

$$\langle \cos^{100} x \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{100} x dx \approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-50x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{50\pi}}.$$

При переходе к интегралу от e^{-50x^2} пределы интегрирования были заменены на $\pm\infty$, поскольку интеграл вне отрезка от $-\pi/2$ до $\pi/2$ мал. Оценим погрешность вычислений. Для этого оценим, насколько выбранная нами функция сильно отличается от данной.

Поскольку существенные значения набираются при малых значениях x , то запишем: $\cos^{100} x \approx (e^{-x^2/2} - x^4/12)^{100} \approx e^{-50x^2} (1 - 25x^4/3)$. Тогда можно оценить погрешность вычисления:

$$\langle \cos^{100} x \rangle - \frac{1}{\sqrt{50\pi}} \approx -\frac{25}{3\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-50x^2} dx = -\frac{1}{2000\sqrt{2\pi}}.$$

Следовательно, относительная погрешность вычисления 0.25%.

p11.1. Для вычисления этой асимптотики воспользуемся интегрированием по частям (19) столько раз, сколько необходимо:

$$\text{Erf}(x) = \int_x^{\infty} \frac{de^{-t^2}}{2t} = \frac{e^{-x^2}}{x} - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + R(x).$$

Первые слагаемые — члены разложения, а последний интеграл $R(x)$ — погрешность вычислений. Оценим его:

$$|R(x)| = \frac{3}{8} \left| \int_x^{\infty} \frac{de^{-t^2}}{t^5} \right| \leq \frac{3}{8x^5} \int_x^{\infty} de^{-t^2} = \frac{3e^{-x^2}}{8x^5}.$$

Таким образом, указанных членов разложения достаточно для вычисления $\text{Erf}(2) \approx 15e^{-4}/32 \pm 2.5\%$.

p11.2. Обратим внимание, что для двух указанных асимптотик, $x \ll 1$ и $x \gg 1$, мы воспользуемся интегрированием по частям (19), но выбор функций u и v будет различен. Для случая $x \gg 1$:

$$S(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{x+t} = -\frac{e^{-t}}{x+t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + R(x).$$

Для второго случая $x \ll 1$ имеем:

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^{\infty} e^{-t} d \ln(x+t) = e^{-t} \ln(x+t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(x+t) dt = \\ &= -\ln x + \int_0^{\infty} e^{-t} d \left[(x+t) \ln \frac{x+t}{e} \right] = -\ln x - x \ln \frac{x}{e} + R(x). \end{aligned}$$

В обоих случаях несложно показать, что $R(x)$ мал в сравнении с предыдущими слагаемыми.

p11.3. Воспользуемся интегрированием по частям (19):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) \cos kx \, dx &= \frac{f(x) \sin kx}{k} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{f'(x) \sin kx}{k} \, dx = \\ &= -\frac{f'(0)}{k^2} - \int_0^\infty \frac{f''(x) \cos kx}{k^2} \, dx = -\frac{f'(0)}{k^2} + \int_0^\infty \frac{f'''(x) \, d \cos kx}{k^4}. \end{aligned}$$

Несложно убедиться, что последнее слагаемое порядка $O(k^{-4})$.

p12.1. Подробное математическое доказательство может быть найдено в [4]. Здесь мы, опуская некоторые математические тонкости, проследим основные моменты доказательства. Для определенности будем считать, что $f(a)$ — минимальное значение на интервале интегрирования. Проведем в интеграле (20) замену переменных $u = \sqrt{f(x) - f(a)}$:

$$\int_a^b \phi(x) e^{ikf(x)} \, dx = \int_0^c \varphi(u) e^{iku^2 + ikf(a)} \, du, \quad \varphi(u) = \phi(x) \frac{dx}{du} \Big|_{f(x)-f(a)=u^2}.$$

Здесь $c = \sqrt{f(b) - f(a)}$. Обратим внимание, что функция e^{iku^2} быстро осциллирует за счет большого параметра k везде, кроме окрестности $u = 0$. Поэтому следует ожидать, что основной вклад в интеграл будет давать только окрестность $u = 0$. Учитывая, что $f'(a) = 0$, в окрестности $x = a$ имеем:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{\xi^2 f''(a)}{2} + \frac{\xi^3 f'''(a)}{6} + \dots, \quad \xi = x - a, \\ f'(x) &= \xi f''(a) + \frac{\xi^2 f'''(a)}{2} + \dots, \quad \phi(x) = \phi(a) + \xi \phi'(a) + \dots \end{aligned}$$

Тогда разложим функцию $\varphi(u)$ в окрестности $u = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \frac{2\phi(x) \sqrt{f(x) - f(a)}}{f'(x)} \Big|_{f(x)-f(a)=u^2} = \phi(a) \sqrt{\frac{2}{f''(a)}} + Au + \dots, \\ A &= \frac{6\phi'(a) f''(a) - 2\phi(a) f'''(a)}{[f''(a)]^2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Теперь мы можем вычислить исходный интеграл, представив его в виде:

$$\int_a^b \phi(x) e^{ikf(x)} dx = e^{ikf(a)} \phi(a) \sqrt{\frac{2}{f''(a)}} \int_0^\infty e^{iku^2} du + R, \quad (26)$$

$$R = O\left(\int_c^\infty e^{iku^2} du\right) + O\left(\int_0^c u e^{iku^2} du\right).$$

Оба интеграла несложно оцениваются после замены переменных $w = ku^2$. В результате имеем $R = O(k^{-1})$. В уравнении (26) делаем замену $iz^2 = ku^2$ и приходим к интегралу Пуассона⁹, что доказывает утверждение задачи.

p12.2. Определим точку стационарной фазы: $f'(x) = 2x - 2 = 0$. Следовательно, $x_0 = 1$ и совпадает с началом интервала интегрирования в условии задачи. Воспользуемся равенством (20) и получим, что главное приближение интеграла равно $e^{-ik} \sqrt{\pi i / 4k}$.

p12.3. В первую очередь заметим, что подынтегральное выражение равно $\Re[e^{100i(x^4-x)}]$. Точка стационарной фазы в этом случае $x_0 = 2^{-2/3}$. Поскольку интегрирование ведется по всей вещественной оси, мы представим данный интеграл в виде суммы интегралов от $-\infty$ до x_0 и от x_0 до $+\infty$. Для каждого из интегралов можно применить равенство (20) при $k = 100$. В результате имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos [100(x^4 - x)] dx = \Re \left[e^{-75 \cdot 2^{-2/3} i} \left(\frac{2^{1/3} \pi i}{300} \right)^{1/2} + R \right].$$

Учитывая, что $\sqrt{i} = e^{-i\pi/4}$, окончательно получаем,

$$\left(\frac{2^{1/3} \pi}{300} \right)^{1/2} \cos (75 \cdot 2^{-2/3} + \pi/4) = -0.070629.$$

Оценим погрешность вычислений R . Для этого обратимся к задаче **p12.1**, где была вычислена величина A . Тогда можно провести

⁹Заметим, что интегрирование проходит по прямой от 0 до $\sqrt{i}\infty$ в комплексной плоскости. Для получения классического интеграла Пуассона по вещественной прямой от 0 до $+\infty$ нужно рассмотреть замкнутый контур интегрирования, состоящий из отрезков длиной R этих прямых от нуля и дуги окружности. Интеграл по этому контуру равен нулю.

оценку:

$$|R| \approx 2^{8/3} \left| \int_0^\infty u e^{100iu^2} du \right| = \frac{2^{2/3}}{50}.$$

Следовательно, относительная погрешность вычислений меньше 8%.

p13.1. Доказательство аналогично решению задачи **p12.1**, поэтому остановимся лишь на главных отличиях. Проведем замену переменных $u = \sqrt{f(a) - f(x)}$:

$$\int_a^b \phi(x) e^{pf(x)} dx = \int_0^c \varphi(u) e^{pf(a) - pu^2} du, \quad \varphi(u) = \phi(x) \frac{dx}{du} \Big|_{f(a)-f(x)=u^2}.$$

Здесь $c = \sqrt{f(a) - f(b)}$. Очевидно, что за счет множителя e^{-pu^2} основной вклад в интеграл дают значения u , близкие к 0. Разложим $\varphi(u)$ в окрестности $u = 0$: $\varphi(u) = \phi(a) \sqrt{2/|f''(a)|} + Au + \dots$, где A определено соотношением (25). Первое слагаемое определяет главный член в равенстве (22), следующие позволяют оценить погрешность вычислений.

p13.2. На отрезке от 0 до π функция $\cos x$ в показателе экспоненты убывает и, следовательно, имеет максимум в точке $x = 0$. Следовательно, можно воспользоваться равенством (22):

$$I_n(p) = \frac{1}{\pi} e^p \sqrt{\frac{\pi}{2p}} + O(p^{-1} e^p) = \frac{e^p}{\sqrt{2\pi p}} + O(p^{-1} e^p), \quad p \rightarrow +\infty.$$

p13.3. Проведа замену переменных $x = pt$, получим интеграл, в котором максимум подынтегральной функции достигается в точке $x = 1$. После этого можно применять метод Лапласа (22), разбивая промежуток интегрирования на два, от 0 до 1 и от 1 до ∞ :

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx = p^{p+1} \int_0^\infty e^{p(\ln t - t)} dt \approx 2p^{p+1} e^{-p} \sqrt{\frac{\pi}{2p}},$$

что и доказывает асимптотическую формулу Стирлинга.

p13.4. Для вычисления интеграла будем использовать метод перевала. В данном случае, $f(z) = z + iz - z^3$, $\phi(z) = 1$, в согласии

с интегралом (24), и кривая γ — это луч от 0 до $+\infty$ вдоль вещественной оси. Определим точки перевала: $f'(z) = 1 + i - 3z^2 = 0$, то есть имеем две точки перевала: $z = \pm\sqrt{(1+i)/3}$. Выберем новый путь интегрирования γ' в виде луча от 0 до $\infty \cdot e^{i\pi/8}$. Этот луч проходит через одну из точек перевала, а именно, $z_0 = (2/9)^{1/4}e^{i\pi/8}$. Интеграл по γ' равен интегралу по γ , поскольку в секторе окружности радиуса R , стороны которого лежат на γ и γ' , нет особых точек подынтегральной функции, а интеграл по дуге этого сектора стремится к нулю при $R \rightarrow +\infty$. В интеграле по γ' сделаем замену переменных, $z = (y + 1)z_0$, так, чтобы интегрирование велось по вещественной оси и точка перевала оказалась в $y = 0$:

$$I(p) = \int_0^{\infty \cdot e^{i\pi/8}} e^{p(z+iz-z^3)} dz = z_0 \int_{-1}^{\infty} e^{pz_0^3(2-3y^2-y^3)} dy.$$

Здесь было учтено, что $(1+i)z_0 = 3z_0^3$. Дальнейшие вычисления опираются на метод Лапласа. Абсолютная величина подынтегральной функции быстро убывает (поскольку $p \rightarrow +\infty$) при удалении от $y = 0$, следовательно, для вычисления главного приближения мы можем пренебречь в показателе экспоненты слагаемым y^3 и продлить область интегрирования до $-\infty$, после чего интеграл сведется к интегралу Пуассона:

$$I(p) \approx z_0 e^{2pz_0^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3pz_0^3 y^2} dy = e^{2pz_0^3} \sqrt{\frac{\pi}{3pz_0^3}}, \quad z_0 = (2/9)^{1/4} e^{i\pi/8}.$$

Указания

p1.1. Для проведения вычислений и оценки погрешности необходимо воспользоваться формулой Тейлора для функций $\sqrt{1+x}$ и формулой для остаточного члена.

p1.2. Воспользоваться формулой приведения $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$ и разложить $\sin(\pi - 3)$ по формуле Тейлора.

p1.3. Представьте величину 1 дБ, $10^{1/10}$, в виде $\exp(\frac{1}{10} \ln 10)$ и разложите ее в окрестности $x_0 = 0$, а $\ln 10$ в окрестности $x_0 = e^2$.

h1.2. Представить $\ln 3$ в виде $1 + \ln [1 + (3 - e)/e]$ и разложить $\ln(1 + x)$ по формуле Тейлора.

h1.3. Вычислите асимптотически выражение $\pi - e \ln \pi$ и убедитесь, что это положительное число. Для вычисления $\ln \pi$ см. указание к **h1.2.**

p2.1. Разложите $F(x_0 + \Delta x, \varepsilon)$ по формуле Тейлора, сохраняя только члены разложения порядка Δx и ε .

p2.2a. Представьте данное уравнение в виде $F(x, \varepsilon) = 0$ и воспользуйтесь равенством (2).

p2.2b. Определите корни в нулевом, первом и втором приближениях: $x \approx x_0$, $x \approx x_0 + x_1$ и $x \approx x_0 + x_1 + x_2$, соответственно. Разложите данное уравнение, сохраняя в нем слагаемые больше и порядка x_1^2 и ε^2 (для первого приближения) и слагаемые больше и порядка ε^4 и x_2^2 (для второго приближения).

p2.3. Представьте уравнение в виде $F(x, \varepsilon) = \sin x - \varepsilon e^{-x} = 0$, где $\varepsilon = 1/4$, и найдите решение, считая ε малым параметром.

p2.4. Уравнение имеет решения: $x^{(0)} = 0$ и $x^{(\pm n)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, при этом $x^{(-n)} = -x^{(n)}$. В нулевом приближении $x^{(n)} \approx \pi(n + 1/2)$. Найдите первое приближение $x^{(n)}$, раскладывая по большому параметру n .

h2.3. Уравнение имеет решения: $x^{(0)}$ и $x^{(\pm n)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. В нулевом приближении $x^{(0)} = \pi/4$ и $x^{(\pm n)} \approx \pm \pi n/2$. Найдите первое приближение $x^{(\pm n)}$, раскладывая по большому параметру n , и первое приближение $x^{(0)}$, раскладывая по малости отклонения от $\pi/4$.

h2.4. Разложите $F(x_0 - \varepsilon F'_\varepsilon(x_0, 0)/F'_x(x_0, 0) + \Delta x, \varepsilon)$ по формуле Тейлора, сохраняя только члены разложения порядка Δx , ε и ε^2 .

p3.1a. В нулевом приближении $y = f_0(x) = \pi/2$. Обозначив $\varepsilon = \mu^{-1} \ll 1$, запишите $F(x, y, \varepsilon) = \operatorname{arctg}(y + \varepsilon^{-1}) - y + x\varepsilon = 0$. Затем воспользуйтесь равенством (4). А для вычисления второго приближения разложите $F(x, f_\varepsilon(x), \varepsilon)$, сохраняя слагаемые больше и порядка ε^2 и второй поправки.

p3.2a. Запишите $F(t, y, \varepsilon) = y - \ln [y + \varepsilon^2(t^2 + 1)] - \cos \varepsilon t = 0$, сделав замену $\varepsilon = \mu^{-1} \ll 1$, $x = \varepsilon t$. Найдите первое приближение, разложив $F(t, f_0(t) + f_1(t), \varepsilon)$ и сохранив слагаемые до $f_1^2(x)$ и ε^2 .

p3.2b. Запишите данное уравнение в виде: $x = \ln(1/y) - \ln x$ и воспользуйтесь тем, что $x \gg \ln x$.

h3.4. Используйте метод Лагранжа (5–6): **(a)** $w = y$, $z = x$, $f(z) = \operatorname{tg} z/z$; **(b)** $w = y$, $z = x - \pi/2$, $f(z) = -z \operatorname{ctg} z/(z + \pi/2)^2$.

h3.5. Смотрите **p2.1** и **h2.4**.

p4.1. (a,b) Перейдите от суммы к интегралу согласно равенства (7). R_n является частью сходящегося ряда и может быть оценен согласно равенства (8).

p4.1c. Основное значение ряда набирается при $l = n - k \ll n$, и можно разложить каждое слагаемое при этом условии.

h4.1d. Сгруппируйте члены ряда в пары с четными и нечетными номерами, а затем действуйте аналогично **p4.1c**.

h4.2. Перейдите от суммы к интегралу:

$$\frac{1}{t} \int_t^\infty \ln(1 - e^{-y}) dy + \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-(n+z)t}} dz.$$

Первый интеграл в главном значении равен $-\pi^2/6$. Поправки найдите, раскладывая подынтегральное выражение. Второе слагаемое раскладываете по малости zt .

p5.1. (a-b) Рассмотрите, как ведет себя функция в различных предельных ситуациях. Изобразите штриховыми линиями на координатной плоскости асимптотики, а затем сплошной линией нарисуйте саму функцию.

p5.2. Определите разность длин Δl хода лучей геометрически точно через S , d и α , а затем, считая $d \ll S$, разложите Δl .

p5.3. Силу взаимодействия шаров представьте в виде интеграла силы взаимодействия пластин, считая, что небольшие участки шаров, находящиеся друг напротив друга, притягиваются как два участка пластин. Учтите, что основное значение интеграл набирает

в окрестности наиболее близких точек шаров, то есть когда $x \ll R$.

р6.1. Точное решение уравнения может быть найдено методом вариации постоянной. Ищите асимптотическое решение в виде ряда $x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + \dots$, раскладывая исходное уравнение и сохраняя слагаемые порядка ε и $x_1(t)$ для первого приближения и ε^2 и $x_2(t)$ для второго.

р6.3. Для $r \rightarrow 0$ можно отбросить E и $U(r)$ по сравнению с $l(l+1)/r^2$. Для $r \rightarrow \infty$ уравнение сведется к: $\psi'' + E\psi = 0$.

р6.4. Решение можно искать, предполагая, что каким-либо из трех членов данного уравнения можно пренебречь. После нахождения ответа в каждом из трех случаев необходимо проверить выполнимость предположения. Следующее приближение можно искать в виде $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$, раскладывая исходное уравнение и сохраняя только слагаемые больше и порядка $y_1(x)$ и 1.

р7.1. Для регулярного решения рассмотрите данное уравнение не вблизи границы и положите $\xi_0(\tau) = 0$ и $\varepsilon = 0$. Для приграничного решения рассмотрите уравнение вблизи границы. Тогда в регулярные функции можно подставить $t = 0$ и в ξ_0 сохранить τ .

р7.2. Воспользовавшись (11)-(12), получим систему уравнений $2\dot{\bar{x}}_0(t) = \bar{x}_0(t) + \bar{y}_0(t)e^t$, $0 = 1 - \bar{x}_0(t)\bar{y}_0(t)$, $\bar{x}_0(0) = 1$ для регулярных решений и $\dot{\eta}_0(\tau) = \bar{x}_0(0)\eta_0(\tau)$, $\xi_0(\tau) = 0$, $\eta_0(0) = y(0) - \bar{y}_0(0)$, где $\tau = t/\varepsilon$, для пограничных решений.

h7.3. Для функций $S_0(x)$ и $S_1(x)$ получите уравнения:

$$[S_0'(x)]^2 = p(x) = 2m[E - U(x)], \quad 2S_0'(x)S_1'(x) + S_0''(x) = 0.$$

h7.4. Представьте данную систему в виде

$$\sqrt{\varepsilon}\dot{y} = h(t, x, \varepsilon), \quad \sqrt{\varepsilon}\dot{x} = y, \quad x(0, \varepsilon) = x^0(\varepsilon), \quad y(0, \varepsilon) = X^0(\varepsilon).$$

р8.1. Решение уравнения (14) ищите в виде: $x = a \cos [\omega_0 t + \varphi]$, где a и φ — функции переменной t . При этом потребуйте, чтобы $\dot{x} = -\omega_0 a \sin [\omega_0 t + \varphi]$. Из этого уравнения и исходного уравнения можно получить

$$\begin{cases} \dot{a} = -\varepsilon\omega_0^{-1} \cdot f[a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi] \sin \psi, \\ \dot{\varphi} = -\varepsilon(a\omega_0)^{-1} f[a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi] \cos \psi. \end{cases}$$

Если ε достаточно мало, то амплитуда $a(t)$ и фаза $\varphi(t)$ оказываются медленно меняющимися функциями времени. Тогда можно усреднить $\dot{a}(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ по фазе ψ за период 2π .

p8.2. Воспользуйтесь уравнениями (15)-(17): $\dot{a} = -\varepsilon a/2$, $\dot{\varphi} = 0$.

p8.3a. Представив решение в указанном виде, подставьте его в исходное уравнение и разложите, сохраняя главное приближение и поправки порядка x_1 , ω_1 и ε . Коэффициенты при резонансных слагаемых, то есть слагаемых, которые могут вносить в $x_1(t)$ линейно растущий вклад, следует приравнять нулю.

p8.3b. Из уравнений (15)-(17): $\dot{a} = 0$, $\dot{\varphi} = 3\varepsilon a_0^2/8\omega_0$.

h8.1. Действуйте аналогично задаче **p8.3**. Однако в первом порядке $\omega_1 = 0$. Это означает, что необходимо раскладывать до второго порядка и вычислять ω_2 . Тем не менее, $x_1(t) \neq 0$, поэтому вычислять $x_2(t)$ не нужно.

p9.2. Определите особые точки, положив $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$. Кроме этих особых точек рассмотрите прямую $y = 0$. Все траектории вблизи этой прямой стремятся к ней как к асимптоте из-за слагаемого $fy^{-1}(t) \cos x(t)$ в уравнении. На этой прямой есть особые точки, в которых это слагаемое обращается в ноль из-за $\cos x$. Определите тип фазовых траекторий в окрестности всех указанных особых точек:

◇ $x = \pi k$ и $y = -2(-1)^k$ — центры, эллипсы с соотношением полуосей $l_z/l_u = 3/2$, например, $2x^2 + 9(y + 2)^2 = \text{const}$,

◇ $x = \pi k$ и $y = (-1)^k$ — вырожденные особые точки, вертикальные прямые или, в следующем порядке, кривые третьего порядка, например, $x^2 - (y - 1)^3 = \text{const}$,

◇ $x = \pi(l + 1/2)$ и $y = 0$ — вырожденные особые точки, гиперболы, например, $x - \pi/2 = \text{const}/y - 3y/4$.

Схематически дополнить портрет вне окрестности особых точек.

p10.1a. Воспользуйтесь формулами (18).

p10.1b. Сделайте замену в интеграле $y = x/\varepsilon$ и разложите подынтегральное выражение в ряд Тейлора, удерживая главное и следующее ненулевое приближение.

p10.2. Значительная часть интеграла набирается в окрестности $x = 10$. Сделайте замену $y = 10 - x$ и приближайте подынтегральную функцию с помощью $10^{10}e^{-(1+\ln 10)y}$. Погрешность вычислений оцените, разложив подынтегральную функцию до следующего порядка: $e^{10 \ln 10 - (1+\ln 10)y}(1 - y^2/20)$.

p10.3. Поскольку $\cos x \approx 1 - x^2/2 + x^4/24$, а $e^{-x^2/2} \approx 1 - x^2/2 + x^4/8$, то функция e^{-50x^2} может служить хорошим приближением для $\cos^{100} x$. Для того чтобы оценить погрешность, разложите до следующего порядка: $e^{-50x^2}(1 - 25x^4/3)$.

h10.2b. Найдите точку максимума функции и приблизьте ее в окрестности этой точки функцией вида $\exp(-ay^2)$.

p11.1. Для вычисления этой асимптотики воспользуйтесь интегрированием по частям (19) столько раз, сколько необходимо, взяв $v(t) = e^{-t^2}$.

p11.2. Для двух указанных асимптотик, $x \ll 1$ и $x \gg 1$, воспользуйтесь интегрированием по частям (19). Для случая $x \gg 1$ на первом шаге $v(t) = (x+t)^{-1}$, для случая $x \ll 1$ возьмите $v(t) = e^{-t}$.

p11.3. В качестве $v(x)$ возьмите $\cos kx$ или $\sin kx$.

h11.3a. Перейдите от интеграла от 0 до $+\infty$ к интегралу по комплексной траектории от $\sqrt[n]{i}$ до $\sqrt[n]{i} \cdot \infty$ (разрез от точки ветвления $\sqrt[n]{i}$). Интегралы вдоль других разрезов оказываются пренебрежимо малыми по сравнению с указанным.

h11.5. См. [4], §11.

p12.1. Проведите замену переменных $u = \sqrt{f(x) - f(a)}$ в интеграле (20), и, учитывая, что $f'(a) = 0$, разложите подынтегральную функцию (кроме e^{iku^2}) в ряд в окрестности $u = 0$. Главное слагаемое в разложении дает искомый результат, следующее может быть использовано для оценки погрешности.

p12.2. Определите точку стационарной фазы, она совпадает с концом интервала, и воспользуйтесь равенством (20).

p12.3. Представьте \cos в виде вещественной части \exp . Определите точку стационарной фазы x_0 , представьте данный интеграл в виде суммы интегралов от $-\infty$ до x_0 и от x_0 до $+\infty$ и воспользуйтесь равенством (20). Оцените погрешность вычислений, используя следующий член разложения подынтегрального выражения (см. решение **p12.1**).

h12.1. Представьте \cos или \sin в виде вещественной или мнимой части соответствующей \exp .

h12.2. Представьте подынтегральное выражение при $k = 50$ в виде $(e^{ik(2\ln x+x)} - e^{ik(2\ln x-x)})/2i$. Первая экспонента не даст вклада в главное приближение, поскольку не имеет точек стационарной фазы в области интегрирования.

h12.3. Действуйте аналогично **p12.1**, проводя в интеграле замену $u = \sqrt[3]{f(x) - f(a)}$ и учитывая, что $f'(a) = f''(a) = 0$, разложите подынтегральную функцию (кроме e^{iku^3}) в ряд в окрестности $u = 0$ ($x = a$).

p13.1. Доказательство аналогично решению задачи **p12.1**. Проведите замену $u = \sqrt{f(a) - f(x)}$ и разложите подынтегральную функцию (кроме e^{-pu^2}) в ряд в окрестности $u = 0$.

p13.2. Найдите максимум функции в показателе экспоненты. На промежутке интегрирования функция убывает, поэтому можно воспользоваться равенством (22).

p13.3. Проведите замену переменных $x = pt$, а затем воспользуйтесь методом Лапласа.

p13.4. Для вычисления интеграла следует использовать метод перевала. Определите точки перевала, а затем выберите новый путь интегрирования γ' в виде луча из 0, проходящий через одну из точек перевала. Докажите, что интеграл по γ' равен интегралу по γ . Дальнейшие вычисления должны опираться на метод Лапласа, для вычисления главного приближения считайте, что интеграл на-

бирается только по окрестности точки перевала, тогда его можно свести к интегралу Пуассона.

h13.2. Для функции $f(x, y) = -(x^2 + y^2) + \ln|1 - x - y|$ найдите экстремальные точки: внутри области интегрирования, когда $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$ ($x_1 = y_1 = (1 + \sqrt{5})/4$); на границе области интегрирования, когда либо $f'_x(x, 0) = 0$ ($x_2 = (1 + \sqrt{3})/2, y_2 = 0$), либо $f'_y(0, y) = 0$ ($x_3 = 0, y_3 = (1 + \sqrt{3})/2$); и $x_4 = 0, y_4 = 0$. Оказывается, что именно окрестность точки $x_4 = 0, y_4 = 0$ дает максимальный вклад в интеграл.

h13.3. Представьте \sin как мнимую часть \exp . В результате получите интеграл вида (24), где $f(z) = 6z + iz^2 + 4iz^3 - z^4, \phi(z) = 1$, кривая интегрирования γ — вещественная полуось от 0 до $+\infty$. Найдите точки перевала: $z_1 = 3i$ и $z_{2,3} = \pm(i + 1)/2$. Проведите луч γ' из 0 через $z_2 = (i + 1)/2$ — это новый путь интегрирования.

Ответы

p1.1. $A_{1,0} = 1 \pm 0.5, A_{1,1} = 1.5 \pm 0.13, A_{1,2} = 1.375 \pm 0.063,$
 $A_{2,0} = 2 \pm 0.71, A_{2,1} = 1.5 \pm 0.18, A_{2,2} = 1.4375 \pm 0.088.$

p1.2. $\sin 3 = 0.1411195 \pm 0.0004\%.$

p1.3. $P_1/P_0 = (1.1 + e^{-2}) \pm 4\% = 1.24 \pm 4\%.$

h1.1. $B_{1,0} = 2 \pm 0.5, B_{1,1} = 1.75 \pm 0.04, B_{1,2} = 1.734 \pm 0.007,$
 $B_{2,0} = 1.7 \pm 0.3, B_{2,1} = 1.73 \pm 0.02, B_{2,2} = 1.732 \pm 0.003.$

h1.2. $\ln 3 = (12e - 9 - e^2)/2e^2 \pm 0.04\% = 1.0983 \pm 0.04\%.$

p2.2. (a) $x \approx \varepsilon.$ (b) $x \approx \varepsilon \pm \varepsilon^2\sqrt{2}.$ **p2.3.** $x = 0.20 \pm 0.01.$

p2.4. $x^{(0)} = 0, x^{(\pm n)} \approx \pm\pi(n + 1/2) \mp \pi^{-1}(n + 1/2)^{-1}, n = 1, 2, \dots$

h2.1. (a) $x \approx \pi(1 - \varepsilon)/2.$ (b) $x \approx 1 \pm \sqrt{2}\varepsilon.$ **h2.2.** $x = 0.33 \pm 0.01.$

h2.3. $x^{(0)} \approx \pi/4 - \pi^2/56, x^{(\pm n)} \approx \pm n\pi/2 + 2/(n\pi)^2, n = 1, 2, \dots$

p3.1. (a) $y \approx \pi/2 + (x - 1)\varepsilon + \pi\varepsilon^2/2.$ (b) $y = 1 \pm \sqrt{x^2 + 2\varepsilon^2}.$

p3.2. (a) $x \approx y^{-1} - y^{-2} + 3y^{-3}/2.$ (b) $x \approx \ln(1/y) - \ln \ln(1/y).$

h3.1. $y \approx -(x + \sin x)(1 + \varepsilon \cos x).$

h3.2. $y \approx x + \pi^2/4 - \pi\varepsilon + (\pi x^2 + \pi^3 x/4 + 1)\varepsilon^2.$

h3.3. $y \approx 1 \pm \sqrt{x^2 + 2\varepsilon^2} - (2x^2 + \varepsilon^2)/3.$

- h3.4.** (a) $x \approx y + y^3/3$. (b) $x \approx \pi/2 - 4y/\pi^2 - 64y^2/\pi^5$.
- p4.1a.** $2\sqrt{n} + S - 2 + O(n^{-1/2})$, где $S \approx 0.5396$.
- p4.1b.** $\ln^2 n/2 + S + O(n^{-1} \ln n)$, где $S \approx -0.0728$.
- p4.1c.** $2^n \ln n - 2^{n+1}n^{-1} + O(2^n n^{-2})$. **p4.1d.** $(2 \ln n)^{-1} + (4n \ln^2 n)^{-1}$.
- h4.1.** (a) $\frac{3n^{4/3}}{4} - \frac{n^{1/3}}{2} + O(1)$. (b) $S - \frac{\ln(n/e)}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$, $S \approx 0.9375$.
- h4.1c.** $S - \ln(2n)/8n + O(\ln n/n^2)$, где $S \approx 0.07993$.
- h4.1d.** $2^{2n+1} \ln(2n)/3 + 2^{2n}/9n + O(2^{2n}/n^2)$.
- p5.2.** $\Delta l \approx d \sin \alpha (1 - d^2 \cos^4 \alpha / 8S^2)$.
- p5.3.** $F_{\text{шап}} \approx \pi R S^{-1} \int_{a_0}^{\infty} F(a) da = \pi R \phi_0 / 3a_0^3$.
- h5.2.** $L \approx \sqrt{2RH}$, $H \gg \sqrt[3]{hR^2}$. **h5.3.** $d \approx a \sin \varphi \cos \theta$.
- h5.4.** $\sqrt{2}(1 - \varepsilon/2)$, $\sqrt{2}(1 + \varepsilon/6)$, $(1 + \varepsilon/12)/\sqrt{2}$.
- p6.1.** $(e^\varepsilon + 2\varepsilon)e^{\frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon}} - 2(\varepsilon + \sin \varepsilon t)$; $e^t + (3e^t - 2 - 2t)\varepsilon + \frac{3-t^3}{6}e^t \varepsilon^2$.
- p6.2.** $x(t) \approx \pi t - (2\pi \ln t + e^{\pi t})/\mu\pi^2$, $y(t) \approx e^{\pi t}/\mu\pi$.
- p6.3.** $\psi(r \rightarrow 0) = C_1 r^l$, $\psi(r \rightarrow \infty) = C_2 e^{-r} \sqrt{|E|}$.
- p6.4.** $y(x) \approx x - 1/(3x^2)$.
- h6.1a.** $\ln \varepsilon - \ln(1 + \varepsilon - e^{t\varepsilon})$, $-\ln(1 - t) + t^2\varepsilon/2(1 - t)$.
- h6.1b.** $[(\lambda_2 - 1)x^{\lambda_1} + (1 - \lambda_1)x^{\lambda_2} + (\lambda_2 - \lambda_1)x]/(\lambda_2 - \lambda_1)\varepsilon(2 + \varepsilon)$,
 $\lambda_{1,2} = -1/2 + \varepsilon \pm \sqrt{1/4 - \varepsilon}$, $(1 - x + x \ln x)(1 + 2\varepsilon) - 2\varepsilon x \ln^2 x$.
- h6.2.** $x(t) \approx 1 + t/\mu$, $y(t) \approx \pi + \pi(\sin t - t)/\mu$.
- h6.3a.** $y(x \ll 1) \approx x + x^5/10$, $y(x \gg 1) \approx e^{x^2/2} - x/2$.
- h6.3b.** $y(x \ll 1) \approx L + x(6 - 6L + 3L^2 - L^3)$, $L = \ln(Cx)$,
 $y(x \gg 1) \approx x^{-1/3} + x^{-2/3}/9$.
- h6.4.** $2f_2(t) = [f''_{\varepsilon\varepsilon} + 2x_1(t)f''_{x\varepsilon} + x_1^2(t)f''_{xx} + x_2(t)f'_x](t, x_0(t), 0)$.
- h6.5.** $y(x) \approx y_0(x) + \varepsilon y_1(x)$, $y''_0 + a_0 y'_0 + b_0 y_0 = c(x, 0)$, $y_0(x_0) = u(0)$,
 $y'_0(x_0) = v(0)$, $y''_1 + a_0 y'_1 + b_0 y_1 = c'_\varepsilon(x, 0) - a'_\varepsilon(x, 0)y'_0 - b'_\varepsilon(x, 0)y_0$,
 $y_1(x_0) = u'_\varepsilon(0)$, $y'_1(x_0) = v'_\varepsilon(0)$, $a_0 = a(x, 0)$, $b_0 = b(x, 0)$.
- p7.1.** $x(t) = (e^{-t} - e^{-t/\varepsilon})/(1 - \varepsilon)$, $x(t) \approx e^{-t} - e^{-t/\varepsilon}$.
- p7.2.** $x_0(t) = (1 + t)^{1/2} e^{t/2}$, $y_0(t) = (1 + t)^{-1/2} e^{-t/2} + e^{-t/\varepsilon}$.
- h7.1.** $x(t) = -[e^t(t^2 + 1) - 3/2]^{-1}$, $y(t) = (t + 1)^2 x(t) - e^{-t/2\varepsilon}$.
- h7.2.** $x(t) = \{-2e^{-t} + [3 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 + 2t(1 - \varepsilon)] e^{-t/\varepsilon}\} / (1 - \varepsilon)^2$,
 $y(t) = \{2(2 - \varepsilon)e^{-t} - [3 - \varepsilon^2 + 2t(1 - \varepsilon)] e^{-t/\varepsilon}\} / (1 - \varepsilon)^2$;

$$x(t) \approx [(3 + 2t) + (4 + 2t)\varepsilon]e^{-t/\varepsilon} - (2 + 4\varepsilon)e^{-t},$$

$$y(t) \approx -[(3 + 2t) + (6 + 2t)\varepsilon]e^{-t/\varepsilon} + (4 + 6\varepsilon)e^{-t}.$$

h7.3. $\psi(x) = C_1 p^{-\frac{1}{2}}(x) e^{\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx} + C_2 p^{-\frac{1}{2}}(x) e^{-\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx}.$

p8.2. $x(t) \approx a_0 e^{-\varepsilon t/2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$

p8.3. $x(t) \approx a(t) \cos(\omega t + \varphi_0), \omega = \omega_0 + 3\varepsilon a_0^2/8\omega_0,$

(a) $a(t) = a_0 + 3\varepsilon a_0^3 [2 \cos(2\omega t + 2\varphi_0) - 1]/32\omega_0^2;$ (b) $a(t) = 0.$

h8.1. (a) $x(t) \approx a(t) \cos(\omega t + \varphi_0) - 2\varepsilon a_0^2/3\omega_0^2,$

$\omega = \omega_0 - 5\varepsilon^2 a_0^2/12\omega_0^3, a(t) = a_0 + \varepsilon a_0^2 \cos(\omega t + \varphi_0)/3\omega_0^2.$

(b) $x(t) \approx a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$

h8.2a. $a(t) = a_0 e^{\varepsilon t/2} [1 + a_0^4 (e^{2\varepsilon t} - 1)/8]^{-1/4}, \varphi = \varphi_0.$

h8.2b. $a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{b(t)}}, \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{\omega \ln b(t)}{2\omega_0}, b(t) = 1 + 3a_0^2 \varepsilon t \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2}.$

h8.2c. $a(t) = a_0 + \varepsilon t (\sqrt{2} - 1)/a_0, \varphi(t) = \varphi_0.$

p9.1. и **p9.2.** см. рис. 2.

h9.1. $y|_{x \rightarrow +\infty} \approx 1/x, y|_{x \rightarrow -\infty} \approx x^{-1/3} e^{-x/3}, y|_{x \rightarrow 0} \approx x.$

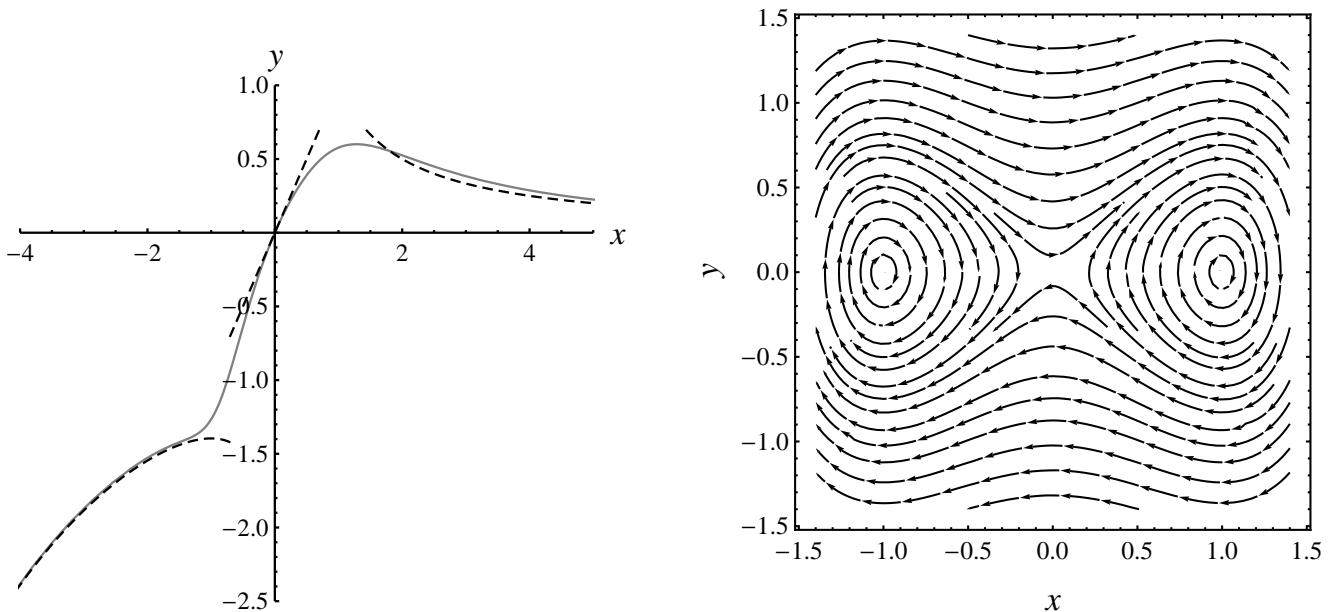


Рис. 3. Графики к задачам **h9.1** (слева) и **h9.2** (справа)

h9.2. см. рис. 3. **h9.3.** и **h9.4.** см. рис. 4.

p10.1a. $1 - \cos 1 + \varepsilon(2 - \cos 1 - 2 \sin 1).$ **p10.1b.** $\varepsilon^4 \sqrt{\varepsilon} (3 + \varepsilon)/12.$

p10.2. $10^{10}/(1 + \ln 10) \pm 0.9\%.$ **p10.3.** $(50\pi)^{-1/2} \pm 0.25\%.$

h10.1. (a) $(6 - 2e)\varepsilon - e\varepsilon^2.$ **(b)** $1 - \varepsilon/3.$ **(c)** $\varepsilon + \varepsilon^2(2 \ln \varepsilon - 1)/4.$

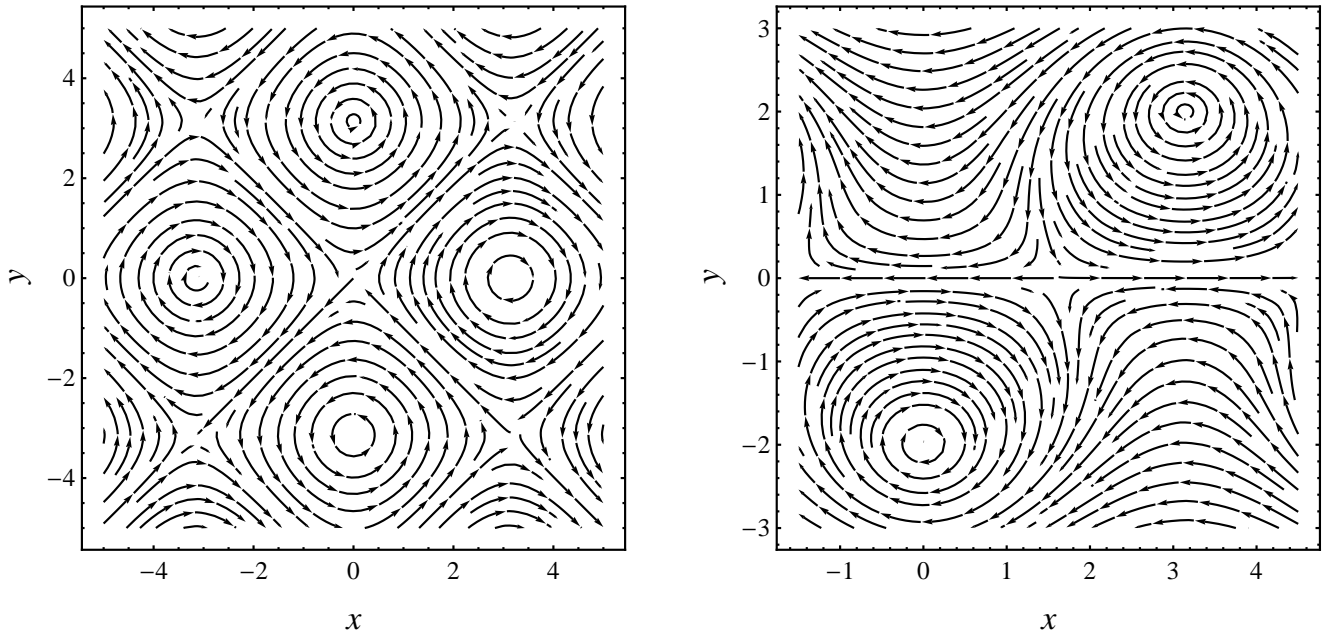


Рис. 4. Графики к задачам **h9.3** (слева) и **h9.4** (справа)

h10.2. (a) $4^{1-n}/n$. (b) $\sqrt{\pi/600} \pm 0.5\%$.

h10.3. $I''(0) = f_0(b_0)b''(0) - f_0(a_0)a''(0) + \int_{a_0}^{b_0} f''_{\varepsilon\varepsilon}(x, 0)dx +$
 $+b'(0)[f'_x(b_0, 0)b'(0) - 2f'_\varepsilon(b_0, 0)] - a'(0)[f'_x(a_0, 0)a'(0) - 2f'_\varepsilon(a_0, 0)].$

p11.1. $\text{Erf}(x) \approx e^{-x^2}(x^{-1} - x^{-3}/4)$; $\text{Erf}(2) = 15e^{-4}/32 \pm 2.5\%$.

p11.2. $S(x \gg 1) \approx x^{-1} - x^{-2}$; $S(x \ll 1) \approx -\ln x - x(\ln x - 1)$.

h11.1. $F_1(x) \approx -\frac{\sin x^2}{2x} + \frac{\cos x^2}{4x^3}$; $F_2(x) \approx \frac{\cos x^2}{2x} + \frac{\sin x^2}{4x^3}$.

h11.2. $\Gamma(a, x) \approx e^{-x}[x^{a-1} + (a-1)x^{a-2} + (a-1)(a-2)x^{a-3}]$;

$\Gamma(1/5, 5) = 0.0017 \pm 5\%$. **h11.3a.** $(-1)^n(2n-1)!k^{-2n}$.

h11.3b. $\frac{8\pi}{nk}e^{-k \sin \frac{\pi}{2n}} \cos \left[\frac{\pi}{4}(n^{-1} - 1) + k \cos \frac{\pi}{2n} \right]$.

p12.2. $e^{-ik} \sqrt{\frac{i\pi}{4k}}$. **p12.3.** $\left(\frac{2^{1/3}\pi}{300}\right)^{1/2} \cos \left(\frac{75}{2^{2/3}} + \frac{\pi}{4}\right) \pm 8\%$.

h12.1. (a) $\left[\sqrt{2} \cos \left(\frac{k}{27} + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right] \sqrt{\frac{\pi}{8k}}$. (b) $\sqrt{\frac{\pi}{k}} \cos \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$.

h12.1c. $2(3k)^{-1/3}\Gamma(4/3)e^{i(2k+3\pi)/18}$. **h12.2.** $(2/e)^{70i} \sqrt{\pi i/35}$.

p13.2. $e^p / \sqrt{2\pi p} + O(p^{-1}e^p)$.

p13.4. $e^{2pz_0^3} \sqrt{\pi/(3pz_0)}$, $z_0 = (2/9)^{1/4}e^{i\pi/8}$. **h13.1.** $\pi^{p+2}p^{-2}$.

h13.3. $e^{7p/4} \sqrt{\frac{\pi}{2p\sqrt{13}}} \sin [2p + \varphi]$, $\text{tg } 2\varphi = 3/2$.

Список литературы

- [1] Асимптотические методы в анализе / Н. Г. Де Брёйн. — М. : Изд-во иностранной литературы, 1961. — 248 с.
- [2] Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. — М. : Наука, 1973. — 272 с.
- [3] Методы возмущений / А. Найфэ. — М. : Мир, 1976. — 446 с.
- [4] Асимптотические разложения / Э. Копсон. — М. : Мир, 1966. — 160 с.
- [5] Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов. — 3-е изд. — М. : Наука, 1979. — 320 с.
- [6] Асимптотические разложения / А. Эрдейи. — М. : Физматгиз, 1962. — 128 с.
- [7] Методы асимптотической оценки интегралов / З. С. Агранович. — Х. : ХГУ, 1970. — 50 с.

Навчальне видання

Апостолов Станіслав Сергійович
Майзеліс Захар Олександрович

АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ

Навчально-методичний посібник *(Рос. мовою)*

Відповідальний за випуск *О. І. Любімов*
Коректор *О. В. Гавришенко*
Комп'ютерне верстання *З. О. Майзеліс*
Макет обкладинки / *М. Дончик*

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 2,3. Тираж 50 пр. Зам. № 130/12.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
61022, Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09.

Видавництво ХНУ імені В.Н. Каразіна
Тел. 705-24-32